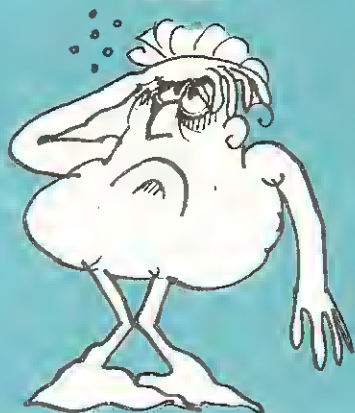
Pierre Lucie

FÍSICA COM MARTINS E EU

VOLUME I

INTRODUÇÃO À FÍSICA

CINEMÁTICA

ILUSTRAÇÕES DE Heujil

Pierre Lucie
Professor do Departamento de Física
da PUC — Rio de Janeiro

FÍSICA COM MARTINS E EU

VOLUME I
Introdução à Física
Cinemática

EDIÇÃO PRELIMINAR

ILUSTRADA POR HENFIL

Rio de Janeiro - GB - 1969

PREFÁCIO DA EDIÇÃO PRELIMINAR

Ao iniciar êste livro, eu tinha dois objetivos fundamentais em vista.

- demistificar o ensino da Física para os que abordam esta Ciência pela primeira vez;

- mostrar que o estudo da Natureza e de suas leis é um passatempo agradável... tão agradável que o perigo de ser levado pelo canto da sereia é real, e tanto melhor assim.

Não me fale de arte bizantina, dizia não me lembro mais quem,porque eu sou capaz de gostar...

O adolescente desta segunda metade do século é também um Cientista nato. Êle gosta de observar e de saber "por que".

Acontece porém com desusada frequência que essa sede de compreensão esbarra contra as muralhas dos falsos templos que ainda existem por aí.

Derrubemos essas muralhas. Não há templos. Há nos laboratórios dos Departamentos de Física das Universidades homens iguais aos outros.

Um pouco mais ou um pouco menos de talento não é barreira nenhuma. O Físico no seu laboratório tem a mesma vontade de viver sua vida, as mesmas preocupações fundamentais, as mesmas alegrias, mas também as mesmas angústias que o pintor, o músico, o homem de teatro, o romancista. Desde que se é um bom profissional, as regras do jôgo são pràticamente as mesmas.

De modo que mistério não há. Ou melhor, há sim. Os fundamentais. Os que mistério são para todo mundo. Mas por favor, não me venha com mistério para chegar aos mistérios. Não sei se me faço entender.

Se nós que gostamos da Física, e que vivemos dela, queremos transmitir uma parcela de nosso entusiasmo aos nossos alunos, não é difícil não. Èsòmente tentar falar da Física como realmente é. Primeiro, sem pompa desnecessária. O colarinho e a gravata já se transformaram em peças de museu. Porquenão? Não gostam de usar gravata? De acôrdo. Também tenho horror. Mas que isto seja também ao figurado. Daí as minhas conversas com o Martins.

O que eu quero dizer é o seguinte: entre ensinar brincando e ensi -

nar chateando, eu prefiro ensinar brincando. Daí a declarar que eu conseguí atingir o meu objetivo é uma outra estória. Mas pelo menos tentei.

Em segundo lugar, se quisermos interessar os jovens no estudo da Física, falemos de Física. Isto é, em primeiro lugar, do fenômeno. E se possível, mostremos. Já sei! O bendito argumento da falta de Laboratórios acessíveis a êsse nível. Mas sejamos de bôa fé! Com um pouco de imaginação e de bôa vontade, muita coisa pode ser feita.

Isto é, quando eu falo de pêndulo, eu mostro primeiro o pêndulo. Acontece que eu tenho geralmente nos bolsos pedaços de barbante, elásticos de escritório, e mesmo alguns prendedores de roupa. É incrível o que a gente consegue fazer com sucata caseira.

De modo que, repetindo, há de se partir do fenômeno, e ilustrar êsse fenômeno quando possível.

Se não fôr possível, tentemos pelo menos trazer no texto um pouco do Laboratório. Eis porque o livro, principalmente a partir do 2º volume, anda cheio de fotografias e de gráficos, feitos realmente em Laboratório.

A partir do fenômeno e de sua representação gráfica, tentemos desenvolver aquelas qualidades tão importantes para quem passa da infância para a maturidade: o bom senso, a intuição dirigida, a observação, o senso de crítica; em resumo: a arte de raciocinar bem. Perdoem-me por grifar êsse "bem". É que tanta gente raciocina mal a partir de premissas falsas que o verbo já perdeu muito de sua fôrça de expressão.

Mas voltando àquelas qualidades que enumerei acima, vejam: são no fundo as qualidades que nós todos gostaríamos de reconhecer em qualquer cidadão bem formado.

E por acaso não é exatamente a formação do adolescente, do futuro cidadão, que deveria ser a tônica do ensino médio?

De modo que eu fui naturalmente levado a definir o possível público deste livro: eu quis que êle pudesse contribuir à formação do cidadão. Eu uso essa palavra no mais amplo sentido, evidentemente. Como essa formação se processa geralmente numa faixa de idade que situa o adolescente no ensimo médio, então êste livro é destinado ao ensino médio. Mas não por exclusividade. Eu quis também que seja útil para quem gosta de aprofundar sua formação.. emqualquer idade.

Mais uma vez trata-se de objetivos. Não sei se consegui atingí-los. Mas pelo menos eu escolhi; eu tomei partido.

Eu escolhi certos tópicos e eliminei outros que me pareceram pouco propícios à formação. Querem exemplos? Pois não:

- eu trato em têrmos elementares a Teoria Cinética dos Gases, porque há um modêlo simples que permite entender o que é pressão em um gás, e temperatura. Mas não falo de Hidrostática porque não existe nêsse nível nenhum modêlo que permita entender o mecanismo de pressão em um líquido.

- eu demoro no estudo dos pulsos e de ondas que se propagam em meios elásticos, porque assim fazendo eu construo uma base sólida para o estudo dos fenômenos de difração e de interferências em Ótica. E o estudo dêsses fenômenos é formativo porque êles conduzem a uma compreensão melhor da Física do átomo. Mas eu não daría nenhum passo a mais no sentido da formação, ao enumerar as leis das cordas ou dos tubos sonoros. Eis porque não há Acústica nêste livro. Eu quero dizer o seguinte: quem entendeu o mecanismo de propagação de uma onda e a formação de ondas estacionárias em geral aprenderá em 15 minutos o que êle precisa saber de Acústica, quando e se êle precisar.

- eu estudo a interação elementar entre um condutor e um campo magnético. Isto me leva a entender melhor a conexão, o dualismo, entre campo elétrico e campo magnético. Mas eu não estudo os motores, porque isto é técnica. É informação e não formação. Mas nem tanto ao mar nem tanto à terra. Na aula, ao comentar a interação elementar, eu cito evidentemente os motores. Como exemplo.

E assim por diante.

Eu tomo posição quanto à maneira de expor. Fujo, tanto quanto possível, do formalismo matemático. Ah! quantas querelas-amigáveis-tive sôbre o assunto! Continuo firme. Cada dia mais. Não por teimosia idiota. Por convicção.

Esclareço: não sou contra a matemática na Física. Seria tão imbecil, e inócuo, como ser contra o tear mecânico na tecelagem. Conheço bastante a Física para saber que o formalismo matemático é uma linguagem, uma ferramenta, indispensável. Mas cujo domínio deve suceder, e não anteceder, a percepção.

Se não me entendem, tento explicar: vocês podem ensinar uma criança de dois anos a dizer "maçã". Ela dirá "maçã" mas não saberá o que é aquilo, a

não ser que vocês mostrem uma maçã.

E se vocês deixam a criança brincar com maçãs, e eventualmente comê-las, ela saberá o que é a coisa, mesmo sem saber ainda como se chama.

Mais uma vez, o fenômeno primeiro.

De modo que, voltando à minha tese, eu estava dizendo que fujo do formalismo matemático, na medida do possível.

A razão é simples: neste nível, o formalismo matemático é perigoso demais, porque êle tende a substituir a compreensão pelo mecanismo.

Ah! como seria mais simples escrever e ensinar Física "pela matemática", como dizem meus alunos... Acreditem, às vêzes a tentação foi quase que irresistível.

E por coincidência, isso aconteceu tôdas as vêzes que o fenômeno não estava suficientemente claro na minha cabeça.

Quantas vêzes tive que parar para resistir à tentação, e pensar em têrmos de Física, em vez de... puxar o botão!

O que equivale a confessar que aprendi muitas coisas nas minhas conversas com o Martins.

Se é verdade que uma obra, para ter algum valor, deve traduzir a personalidade do autor, é também inegável que ela reflete de alguma maneira parcelas da personalidade dos que contribuíram para a formação de quem a escreve.

Nêsse sentido, é com prazer e com grande honra que eu pago meu tributo de gratidão aos que tiveram um papel significativo na formação da minha personalidade profissional.

Primeiro ao meu mestre Bouasse. Tudo ou quase tudo que eu disse neste prefácio, foi dito, repetido, escrito e proclamado por êle... há uns quarenta anos em média. Que os que pretendem "inovar" em 1969 tenham o cuidado de voltar às fontes preciosas que constituem os prefácios do seu tratado de Física... em 35 volumes, escalonados entre mais ou menos 1914 e 1937.

A seguir, ao Physical Science Study Committee (PSSC), que realmente imprimiu um rumo novo no ensino da Física de grau médio nos Estados Unidos. Trabalhei durante um ano no Education Development Center, onde foi elaborado, e continua sendo ampliado, o programa do PSSC. Declaro sem rodeios que fiquei profundamente "marcado" por essa experiência extraordinária.

Meus agradecimentos ao Curso Vetor, onde encontrei, entre colegas e alunos, a melhor acolhida para que êste livro pudesse ser testado.

Meus agradecimentos a todos os Martins, passados, presentes e futuros, sem os quais o fundo e a forma deixariam ainda mais a desejar.

Minha gratidão a êsse magnífico desenhista, Henfil, que soube tão bem traduzir o espírito dos meus personagens. A alma dêste livro e eu lhe devemos muito.

E finalmente, meu carinhoso obrigado a minha espôsa e ao meu filho, sem cuja infinita compreensão e paciência ao longo de dias e noites infindáveis, e sem cujo apôio, essa obra não tería sido completada.

Rio de Janeiro, julho de 1969

PIERRE LUCIE

Uma edição preliminar contem geralmente muitas falhas, êrros e omissões. Procurarei corrigir a maioria dêles na primeira edição. Agradeço de antemão tôdas as críticas e sugestões que me forem feitas. A correspondência deverá ser endereçada ao Departamento de Física da PUC - Rua Marquês de São Vicente - Rio de Janeiro - GB.

E R R A T A

Pág	Linha	Onde se lê:	Ler:
11	26	0,000000000000000000001cm^2	0,000000000000000000000001cm^2
64	18	Mas a divisão 0,9s dos 20cm disponíveis em ordenadas.	Mas a divisão 0,9s coincidiria com 6,8cm.
78	11	$a = \frac{k_2}{k_1}$ (coeficiente angu lar da reta).	$a = \frac{k_2}{k_1}$. (coeficiente angular da reta).
188	última	(nêsse caso é a mesma coi- sa que	(nêsse caso é a mesma coisa que Δs).
192	3	(aceleração <u>negativa</u> ou <u>de- celeração</u>).	(aceleração <u>negativa</u>).
206	17	Capítulo VI	Capítulo VIII
240	7	As projeções $\vec{MN}$ e $\vec{PQ}$ são...	As projeções $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são...
240	9	Repare que o número que me- de $\vec{MN}$ é...	Repare que o número que mede $\overline{MN}$ é...
240	11	E o número que mede $\vec{PQ}$ é...	E o número que mede $\overline{PQ}$ é...
240	13	Representemos $\vec{MN}$ por X e $\vec{PQ}$ por Y:	Representemos $\overline{MN}$ por X e $\overline{PQ}$ por Y:
244	24	A Figura VI-5 dá também a resposta.	A Figura VI-6 dá também a res- posta.
245	4	transferidor, na Fig. VI-5.	transferidor, na Fig. VI-6.
247	1	Considere a posição dez da bola, assinalada por $\vec{P}_{10}$.	Considere a posição dez da bola, assinalada por P_{10}.
249	13	$\vec{OP}_1 + \vec{P_1P_2}$	$\vec{OP}_1 + \vec{P_1P}$
255	3	Na Fig. VI-9...	Na Fig. VI-10...
255	4	$\Delta x = (x_3 - x_4) = 20cm$	$\Delta x = (x_8 - x_4) = 20cm$

Pág	Linha	Onde se lê:	Ler:
255	9	$\lvert\langle\vec{v}\rangle\rvert = \sqrt{(\frac{x}{t})^2 + (\frac{y}{t})^2}$	$\lvert\langle\vec{v}\rangle\rvert = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$
257	4	F $\vec{M_1 M_2} = \Delta x$	F $\overline{M_1 M_2} = \Delta x$
268	penúltima	Isto significa que a velocidade escalar aumenta:	Isso significa que o valor absoluto da velocidade escalar aumenta.
269	última	A velocidade escalar diminui.	O valor absoluto da velocidade escalar diminui:
278	6	$\lvert\lvert\vec{v}_1\rvert-\lvert\vec{v}_2\rvert\rvert<\lvert\vec{V}\rvert<\lvert\vec{v}_1\rvert+\lvert\vec{v}_2\rvert$	$\lvert\lvert\vec{v}_1\rvert-\lvert\vec{v}_2\rvert\rvert\leq\lvert\vec{V}\rvert\leq\lvert\vec{v}_1\rvert+\lvert\vec{v}_2\rvert$
316	7 a 9	Se o módulo da velocidade..	O módulo da velocidade decresce, e o módulo da aceleração aumenta. Segue que a partícula acabará parando.
316	15	...a esquerda de O indo para os x negativos.	...a esquerda de O indo para os x negativos, com deceleração sempre crescente.
330	12	(Problema VII-7)	(Problema VII-11)
331	11	...da variação $\overline{\Delta v}$ da velocidade...	...da variação $\Delta\vec{v}$ da velocidade...
368	16	$\vec{v}+d\vec{v} = (\vec{v}'+d\vec{v}')+(\vec{V} + d\vec{v})$	$\vec{v}+d\vec{v} = (\vec{v}'+d\vec{v}')+(\vec{V} + d\vec{V})$

Í N D I C E

CAPÍTULO V: CINEMÁTICA ESCALAR - II: APLICAÇÕES

CAPÍTULO VI: CINEMÁTICA VETORIAL - I: OS CONCEITOS

INTRODUÇÃO

Ao abrir êsse livro, e ao ler essas linhas, você começa o estudo da Física. Antes de entrar realmente no assunto, antes de imaginar ou fazer experiências, antes de manipular fórmulas, antes de resolver problemas, vamos conversar um pouco, você e eu.

Em tese, essa Introdução a êsse primeiro livro de Física deveria dizer-lhe o que é a Física, mas acho que não há resposta precisa, nem única, a essa indagação. Muitos anos atrás, costumava-se dizer que a Física é a Ciência que se ocupa do inanimado, do que, na Natureza, não tem relação direta com a vida. Mas isso incluiria boa parte da Química, a Geologia, a Astronomia ... outros ramos do Conhecimento que hoje em dia costumamos considerar como sendo Ciências separadas da Física. Por outro lado, a Biofísica é uma Ciência atualmente em pleno desenvolvimento, algo que estuda fenômenos diretamente ligados à vida, e cujas fronteiras com a Física são - e tendem cada vez mais a tornar-se - muito mal definidas. Essa quase mistura, êsses contôrnos imprecisos, essa falta de definição, longe de constituir-se em casos isolados, tendem a tornar-se regra. O Físico precisa cada vez mais do Químico e de seus conhecimentos, e as diferenças de formação entre o Engenheiro Eletrônico e o Físico são cada vez mais reduzidas. A Física é pois uma das Ciências Naturais, isto é, uma das Ciências que estudam a Natureza, e suas fronteiras com suas congêneres são bastante mal definidas. É porém possível dizer-lhe algo do que realmente, sem ambiguidade, pertence ao domínio da Física.

Um dos traços característicos do Mundo da Física é, sem dúvida nenhuma, sua fabulosa extensão. Não há nenhuma outra Ciência Natural que se aventure tão longe na imensidão do Universo, nem tão profundamente no interior do átomo, nem tão remotamente no tempo.

Quando você olha, à noite, para o céu estrelado, a luz que penetra pela sua pupila pode ter iniciado a sua longa viagem há um milhão de anos. A análise espectral dessa luz lhe dará informações valiosas a respeito do corpo celeste (estrêla, galáxia, ...) que a emitiu, e isto pertence à Física.

Quando você contempla o arco-íris e pergunta a si próprio a que cir

cunstâncias é devido êsse extraordinário fenômeno, você mostra a curiosidade comum a todos os Cientistas, e está preparado para dar seus primeiros passos no estudo da Física.

Ao trocar, em casa, o fio da sua lâmpada de cabeceira, não lhe passará pela cabeça a idéia de substituir o fio metálico por barbante, pois você provàvelmente terá ouvido dizer que o metal é condutor da eletricidade, e o barbante não é. Isto não é explicação, claro! A explicação lhe será dada pela Física.

Os jornais publicam frequentemente notícias dos vôos dos satélites artificiais e da próxima conquista de outros planêtas. Você já leu, ou viu em filmes, e já discutiu com seus colegas, a respeito da fascinante aventura dos cosmonautas que flutuam no espaço, com a Terra girando devagar debaixo dêles e você provàvelmente se pergunta: "Mas será mesmo "falta de pêso" como dizem os jornais?" Pois bem, a Física lhe permitirá entender melhor as performances espaciais.

Você sabe que a velocidade da luz é muito grande, e mesmo sem ainda conhecer exatamente o valor dessa velocidade - o que é normal no ponto em que estamos, você e eu -, se eu lhe perguntasse quanto tempo levaria a luz para atravessar um vidro de janela, você diria: "Bem, eu não sei ao certo, mas êsse tempo é com certeza muito curto. Duvido mesmo que alguém possa medi-lo". Pode-se medir, sim! E você sabia que os Físicos descobriram partículas cuja vida é ainda fantàsticamente menor que o tempo que leva a luz para atravessar o vidro de janela?

E por falar em muito pequeno, vou escrever a seguir o valor de uma área: 10^{-24} cm^2, ou seja:

$$0{,}000000000000000000000001 \ cm^2.$$

Êsse número é tão pequeno que é extremamente difícil representar-se uma área com essa medida. A área da ponta de uma agulha de costura é muito pequena, não é? Pois é ainda cem trilhões de vêzes maior que aquela área que escrevi acima. Você achará provàvelmente que um alvo daquêle tamanho se-

ria muito difícil de atingir. Ora, veja só: os físicos que estudavam reações nucleares durante a guerra acharam que em certas reações um alvo (núcleo) de 10^{-24} cm^2 era tão enorme que o projétil (neutron) não podia pràticamente errá-lo. E por causa disso apelidaram essa área de "barn" (galpão), por brincadeira!

Você provàvelmente não sabe porque os metais se dilatam quando aquecidos, porque o ferro é opaco e o vidro transparente, porque o céu é azul e as nuvens são brancas, ou ainda mais simplesmente, porque faz barulho ao se bater palmas. Tudo isto, e muito mais coisas ainda, a Física lhe poderá explicar. A Física lhe fará amar sempre mais a Natureza, e ao resolver para você alguns dos seus problemas, lhe dará talvez a insaciável curiosidade e o eterno entusiasmo do Cientista.

Pois a Física, entre tôdas as Ciências, é a Ciência por excelência da antecipação. O Físico consagra sua vida a tentar recuar as fronteiras do conhecimento. Penso que sòmente uma outra Ciência, a Genética, possui êsse raro privilégio de trabalhar incessantemente em desequilíbrio, se assim posso dizer, sôbre o desconhecido. O Geneticista sonda os mistérios da origem e da evolução da vida com o mesmo entusiasmo, o mesmo ardor e o mesmo deslumbramento com que o Físico se debruça sôbre as origens e o porvir do Universo.

Você deve ter conciência, naturalmente, que o barco em que embarcou está no meio da viagem. Não começou a andar com você, nem terminará. Os primeiros passos (e perdoe-me de dar pernas a um barco), foram dados há alguns milênios, por gregos ou chineses, ou egípcios, quem sabe? A bem da verdade, devemos reconhecer que o primeiro ser humano que olhou para sua imagem na água de uma fonte e deslumbrou-se com o que via, e procurou uma explicação ao fenômeno, tinha as qualidades fundamentais do Cientista. Porém, há sòmente trezentos anos que nasceu o que chamamos hoje a Física. O século XVII, o século que viu morrer Galileu e nascer Newton, pode ser considerado como a origem, no tempo, da Ciência moderna. Êsses dois primeiros séculos, o XVII e o XVIII foram extraordinàriamente férteis. O que se convém chamar a Mecânica Clássica chegou então pràticamente à sua forma definitiva. O século XIX foi por assim dizer um compasso de espera. Sem dúvida foi o século em que foi construído o

grandioso edifício do Eletromagnetismo, Ampère e Maxwell dirigindo as obras e desenhando a planta dêsse monumento da Física Teórica, porém o espírito era ainda o dos séculos precedentes. Vivia-se sempre na sombra do Grande Newton.

As primeiras notas de inconformismo foram tìmidamente dadas ao apagar das luzes daquêle século, que tinha visto a revolução industrial com a invenção da máquina a vapor. Poincaré, Lorentz, Planck preparam o caminho e prenunciam os novos passos giganteacos que a Física se preparou a dar no começo do século XX. Então Einstein, com a teoria da relatividade restrita, mostra que a Mecânica Newtoniana é sòmente uma teoria de primeira aproximação, cuja validez se reatringe à classe de fenômenos em que intervêm velocidades pequenas em comparação com a velocidade da luz, mostra ao meamo tempo que o magnetismo é um aspecto relativista da eletricidade, e no meamo ano (1905, lembre-se, pois é um dos grandes marcoa da história da Ciência), lança a hipótese da estrutura quântica da radiação eletromagnética. Entretanto, a Fíaica experimental liderada por Thomson e Rutherford, descobria a primeira partícula, o elétron, e aproveitava as recentes deacobertaa no campo da radioatividade para começar abusca em direção do infinitamente pequeno, propondo com Bohr o primeiro modêlo moderno doátomo. Nasce então, eem consequência direta dessas indagações a respeito da estrutura atômica, uma nova mecânica, a mecânica do muito pequeno, em que o caráter deacontínuo da energia do aistema estudado não pode mais ser ignorada. É a Mecânica Ouântica com de Broglie, Schroedinger e Heisenberg. Estamos em 1925. Ouanto caminho percorrido desde Galileu! Mas os fantásticos acontecimentos que sacodem as estruturas cláasicas da Fíaica não param aí. A partir de 1925 vão surgindo nos Laboratórios, deslumbrando os experimentadores, as partículas que constituem em última análise a matéria. O proton, o neutron, e a primeira antipartícula - o poaitron - juntam-se ao elétron. Novos instrumentos surgem: para "quebrar" o núcleo dos átomos a fim de colher informações quanto a sua estrutura, os Fíaicoa bombardeiam os átomos com diversos projéteis (protons, núcleoa de hélio ...) acelerados por máquinas recentemente imaginadas. Começa a era dos grandes aceleradores: Van deGraaff, Ciclotrons, Bevatrons, etc... A corrida para conseguir energias sempre mais altas está hoje mesmo no seu apogeu. Os orçamentos nacionais revelam-se muitas vêzes impotentes para satisfazer os pedidos que conti-

nuam saindo dos Laboratórios de pesquisas das Universidades: algumas das últimas mais potentes máquinas são o fruto da colaboração científica de várias Nações.

E eis que, dêsses mesmos Laboratórios, chegam as primeiras notícias do que poderá, talvez, vir a ser um nôvo passo decisivo no conhecimento da matéria. Possìvelmente, as chamadas "partículas elementares" não seriam tão elementares assim, sendo por sua vez formadas de algo mais fundamental ainda, os "quarks" ...

Eu gostaria que você iniciasse a sua incursão pela Física com o estado de espírito conveniente. E, se possível, esqueça que haverá provas e exames para testar o seu grau de aprendizagem. Não estude Física para "fazer problemas". Resolver problemas, é claro, será necessário para verificar se você realmente entendeu o que está estudando, mas nunca deve constituir-se em objetivo final. Você vai estudar Física para entender melhor o mundo em que vivemos. Os problemas reais são problemas oferecidos pela Natureza, são os desafios que o esperam a cada passo, a cada instante, se você sabe "ver" o que está ao seu redor. Um pianista estuda música para deleitar-se ao tocar a sinfonia de um grande mestre e comungar com o seu autor, não para fazer escalas - embora estas sejam necessárias para apurar sua técnica. Da mesma forma, estude Física para melhor apreciar a sinfonia fantástica do Universo.

CAPÍTULO I

AS GRANDEZAS FÍSICAS E SUA MEDIÇÃO

I-1 Observação, grandezas físicas e medidas.

O Físico experimental consagra bôa parte das suas atividades à observação de fenômenos que envolvem a matéria chamada inerte, estabelecendo-se assim uma distinção com os fenômenos que envolvem matéria viva, os quais são objetos da atenção dos bio-físicos, bio-químicos, médicos, etc...

O Físico pode por exemplo observar o movimento de um planêta; êsse movimento é um fenômeno material. Ou êle pode observar o espectro produzido por uma rêde de difração sôbre a qual incide a luz de uma lâmpada de hidrogênio, no Laboratório. Isto é um fenômeno produzido artificialmente.

Cá entre nós: Se você não sabe o que é espectro, ou rêde de difração, não importa. Eu serei obrigado, no início, a citar fenômenos, ou coisas, que você não conhece ainda. Mas isto nunca terá incidência sôbre a sua aprendizagem da Física.

Você entende naturalmente que observar não pode ser um fim em si. A câmara cinematográfica também observa, nêsse sentido que ela registra o movimento do planêta, como o espectro do hidrogênio.

No entanto o filme assim obtido não chegará nunca a ser Ciência.

A menos que seja interpretado.

A interpretação das observações constitui-se assim na tarefa fundamental do Físico.

Interpretar é saber primeiro o que se está observando. O que se observa é sempre uma grandeza física.

Dizem que as vacas gostam de ver passar os trens. Eu não quero entrar no mérito da questão. Mas se fôr verdadeiro, a vaca está vendo algo "mover-se".

Para o Físico, isto não tem sentido nenhum. Para êle, movimento é um conjunto de percepções sensoriais ou instrumentais que envolvem fundamentalmente duas grandezas físicas: a distância e o tempo.

Distância e tempo são grandezas físicas.

Movimento não é.

Porque razão distância e tempo são grandezas físicas?

Porque podemos medí-las. Você pode comparar o comprimento de uma mesa de trabalho com o comprimento de um lápis. Você dirá: minha mesa mede 10 lápis.

Você pode comparar a duração de um intervalo de tempo com a duração de um intervalo padrão sempre repetido: o intervalo que separa dois tiques do seu relógio. Você dirá: eu levei 50 tiques do meu relógio para atravessar a rua.

Cá entre nós: Leia de novo o parágrafo precedente. Qual é a diferença fundamental que você vê entre a maneira de medir distâncias e a maneira de medir intervalos de tempo?

A título de sugestão, qual seria sua reação se você lêsse no jornal, amanhã, que um "conhecido cientista" inventou uma máquina de engarrafar o tempo?

CAPÍTULO I

AS GRANDEZAS FÍSICAS E SUA MEDIÇÃO

I-1 Observação, grandezas físicas e medidas.

O Físico experimental consagra bôa parte das suas atividades à observação de fenômenos que envolvem a matéria chamada inerte, estabelecendo-se assim uma distinção com os fenômenos que envolvem matéria viva, os quais são objetos da atenção dos bio-físicos, bio-químicos, médicos, etc...

O Físico pode por exemplo observar o movimento de um planêta; êsse movimento é um fenômeno material. Ou êle pode observar o espectro produzido por uma rêde de difração sôbre a qual incide a luz de uma lâmpada de hidrogênio, no Laboratório. Isto é um fenômeno produzido artificialmente.

Cá entre nós: Se você não sabe o que é espectro, ou rêde de difração, não importa. Eu serei obrigado, no início, a citar fenômenos, ou coisas, que você não conhece ainda. Mas isto nunca terá incidência sôbre a sua aprendizagem da Física.

Você entende naturalmente que observar não pode ser um fim em si. A câmara cinematográfica também observa, nêsse sentido que ela registra o movimento do planêta, como o espectro do hidrogênio.

No entanto o filme assim obtido não chegará nunca a ser Ciência.

A menos que seja interpretado.

A interpretação das observações constitui-se assim na tarefa fundamental do Físico.

Interpretar é saber primeiro o que se está observando. O que se observa é sempre uma grandeza física.

Dizem que as vacas gostam de ver passar os trens. Eu não quero entrar no mérito da questão. Mas se fôr verdadeiro, a vaca está vendo algo "mover-se".

Para o Físico, isto não tem sentido nenhum. Para êle, movimento é um conjunto de percepções sensoriais ou instrumentais que envolvem fundamentalmente duas grandezas físicas: a distância e o tempo.

Distância e tempo são grandezas físicas.

Movimento não é.

Porque razão distância e tempo são grandezas físicas?

Porque podemos medí-las. Você pode comparar o comprimento de uma mesa de trabalho com o comprimento de um lápis. Você dirá: minha mesa mede 10 lápis.

Você pode comparar a duração de um intervalo de tempo com a duração de um intervalo padrão sempre repetido: o intervalo que separa dois tiques do seu relógio. Você dirá: eu levei 50 tiques do meu relógio para atravessar a rua.

Cá entre nós: Leia de novo o parágrafo precedente. Qual é a diferença fundamental que você vê entre a maneira de medir distâncias e a maneira de medir intervalos de tempo?

A título de sugestão, qual seria sua reação se você lêsse no jornal, amanhã, que um "conhecido cientista" inventou uma máquina de engarrafar o tempo?

Uma observação traduz-se sempre por um conjunto de medidas efetua - das sôbre as grandezas físicas que caracterizam o fenômeno estudado.

A interpretação das observações efetuadas deve necessàriamente "sair" dêsse conjunto de medidas.

Em segundo lugar, interpretar é saber reconhecer quais são os fatôres que são relevantes no fenômeno observado.

Faça a experiência seguinte: amarre uma pedra na extremidade de um barbante de mais ou menos um metro de comprimento, e faça oscilar o pêndulo que você fabricou. Meça com o seu relógio o intervalo de tempo que abrange 10 oscilações completas (ida e volta).

<u>Cá entre nós</u>: Se nessa altura você não fêz a experiência, pare imediatamente a leitura dêsse livro, vá procurar um pedaço de barbante, e <u>faça</u> a experiência. (*)

Digamos que você achou 20 segundos.

O fenômeno que você observou foi a oscilação de um pêndulo. Essa observação traduziu-se até agora por uma medida. Você pode concluir que o período do seu pêndulo é igual a dois segundos. (O que é que eu chamo período do pêndulo?).

E daí?

Uma máquina registradora podia ter chegado ao mesmo resultado.

(*) Se você não possui relógio com ponteiro de segundos, o seu pulso serve perfeitamente como cronômetro para essa experiência, desde que você observe precauções óbvias. Quais são?

Mas repita a experiência reduzindo à metade o comprimento do barbante.

Você acha agora 17 segundos para as dez oscilações.

Você conclui então que o período do pêndulo **depende do comprimento.**

Ou ainda, que há uma correlação entre período e comprimento do pêndulo.

Você então vai medir **sistemàticamente** o período do pêndulo em função do comprimento. Isto é, você vai dar ao pêndulo, sucessivamente, um metro, noventa centímetros, oitenta centímetros ..., medindo cada vêz o tempo necessário para efetuar dez oscilações.

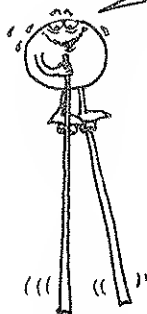
No final, você possuirá uma tabela de valôres do período para diversos valôres do comprimento.

O comprimento é um fator relevante no fenômeno: oscilação de um pêndulo.

Em vez de dizer "fator", diz-se "parâmetro".

Os parâmetros de um fenômeno são grandezas físicas diretamente ligadas ao fenômeno estudado e que podemos variar à vontade, dentro de certos limites.

Mas no decorrer de uma observação, os parâmetros guardam todos êles um valor constante.

Na experiência do pêndulo, o comprimento é um parâmetro. É uma grandeza diretamente ligada ao fenômeno observado e que eu posso variar a vontade (até o comprimento total do pedaço de barbante que eu tenho). Mas no decorrer de cada experiência o comprimento permanece constante.

Cá entre nós: Procure meia dúzia de elásticos de escritório. Amarre-os um a seguir do outro. Você tem assim um elástico de uns 50 cm de comprimento. Amarre uma pedra na extremidade e faça oscilar verticalmente êsse pêndulo. Meça o período.

Quais são os parâmetros relevantes nessa experiência?

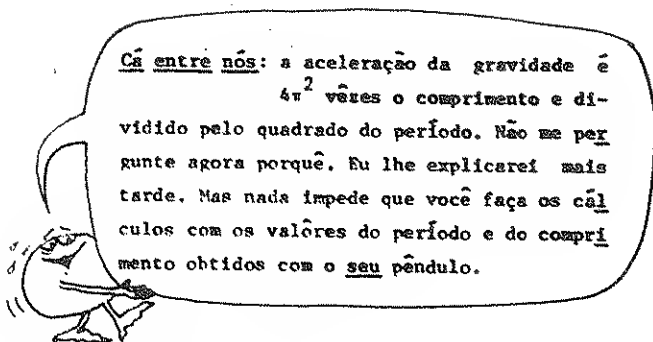
Como é que você pode certificar-se que êsses parâmetros são realmente relevantes?

I-2 Grandezas fundamentais e grandezas derivadas.

Distância e tempo são grandezas físicas.

Massa, aceleração, fôrça são grandezas físicas.

Mas uma medida direta de aceleração é impossível. Por exemplo eu posso medir a aceleração da gravidade (é aproximadamente a aceleração de uma pedra que você deixa cair, ou joga no ar) com um pêndulo do tipo pedra e barbante. Basta medir o período e o comprimento.

Câ entre nós: a aceleração da gravidade é $4\pi^2$ vêzes o comprimento e dividido pelo quadrado do período. Não me pergunte agora porquê. Eu lhe explicarei mais tarde. Mas nada impede que você faça os cálculos com os valôres do período e do comprimento obtidos com o seu pêndulo.

De modo que uma aceleração se mede por intermédio de um comprimento (distância) e de um tempo.

Nós aprenderemos mais tarde que uma fôrça se mede por meio de uma massa, de um comprimento e de um tempo.

Há assim em Física grandezas fundamentais que servem, pelo menos conceitualmente, para medir tôdas as outras.

Essas outras são chamadas grandezas derivadas.

Quantas grandezas fundamentais existem?

Eu não vou responder "completamente" a essa pergunta agora. Não precisa.

Basta por enquanto que você saiba que em Mecânica, há três grandezas fundamentais.

O primeiro assunto que estudaremos juntos pertence à Mecânica. Precisaremos portanto de três grandezas fundamentais para medir (ou entender como se medem) tôdas as grandezas derivadas que encontraremos nêsse estudo.

As três grandezas fundamentais da Mecânica são:

massa comprimento tempo

Comprimento e tempo, você já conhece intuitivamente.

Cá entre nós: Comprimento ainda vá lá. Tempo, eu confesso que talvez não seja tão fácil.

Eu acredito mesmo que você nunca chegue a se sentir muito à vontade com o conceito de tempo.

Eu por minha parte nunca consegui.

Mas acabamos nos acostumando um com o outro, o tempo e eu.

E a massa?

O que vem a ser a massa de um corpo? Ninguém sabe ao justo. A massa se revela a nós por duas propriedades da matéria que aparentemente não têm nenhuma relação entre si e que no entanto devem estar aparentadas, embora não se tenha descoberto até hoje o grau de parentesco.

A primeira dessas propriedades é a "atratibilidade".

Matéria atrai matéria.

Ou pelo menos é assim que se diz para explicar o alongamento do elástico ao qual você suspendeu a pedra, segurando com a mão a outra extremidade.

Ou para explicar que você, eu, e tôdos nós, homens e bichos e pedras e coisas, permanecemos "grudados" ao planêta Terra.

A figura I-1 é uma ilustração talvez ingênua da atração gravitacional.

Ela foi plagiada de uma gravura do "Pequeno Príncipe", de Saint-Exupéry.

Figura I-1

Atração matéria-matéria, ou atração gravitacional. (Com as descul - pas do autor à memória de Antoine de Saint-Exupéry pelo plagio).

<u>Cá entre nós</u>: E isto não tem nada que ver aparentemente com a Física.

Eu suponho que você já leu o Pequeno Príncipe.

Se não o leu, compre o livrinho hoje mesmo e leia.

Você depois me dirá o que achou.

A Terra atrai a pedra, atrai você, me atrai.

E o planêta do Pequeno Príncipe atrai os seus elefantes.

E reciprocamente a pedra, você, eu, atraímos a Terra.

E os elefantes do Pequeno Príncipe atraem o seu planêta.

Pois você concorda que essa atração deve ser recíproca?

Quando um dos corpos em presença é muito maior (mas muito mesmo) que todos os outros, a atração entre aquêle corpo e cada um dos outros "abafa" completamente a atração mútua entre êsses últimos.

Por exemplo na figura I-1 a atração entre o planêta e cada um dos elefantes "abafa" a atração mútua entre dois elefantes.

É assim que é muito difícil, enquanto estamos na Terra, mostrar a atração gravitacional entre duas pedras. Ela existe no entanto. (*)

A segunda propriedade da matéria pela qual se manifesta a massa é a "inércia".

Chute uma bola de borracha, daquelas coloridas com que brincam as crianças.

Chute uma bola de futebol.

Chute um medecine-ball (mas com cuidado por favôr!).

Qual das três bolas entra mais fàcilmente em movimento?

Você observa que, por ordem de "inércia" crescente temos primeiro a bola de criança, a seguir a bola de futebol, e a seguir o medecine-ball.

Essa última bola "resiste" muito mais que as outras a uma mudança do seu estado mecânico. O estado mecânico nos três casos era o repouso.

De modo que a matéria apresenta também essa propriedade curiosa: ela "resiste" a uma ação que tende a modificar o seu estado mecânico.

Essa propriedade se chama inércia.

Mas há algo de muito mais curioso ainda: atratibilidade e inércia vão sempre de par, nas mesmas proporções.

(*) Há um filme, editado por Educational Services Inc. (Newton Mass. USA), e feito pelo Professor J. Zacharias, que mostra de maneira notável a atração Gravitacional entre um caixote de areia e uma garrafa de água. O título do filme é "Forces". Se tiver a oportunidade de vê-lo não a perca.

Se a atração da Terra sôbre o corpo A é duas vêzes maior que sôbre o corpo B, o corpo A resistirá duas vêzes mais que o corpo B a uma mesma ação que tenderia a movimentar êsses corpos a partir do repouso.

Cá entre nós: Você deve possìvelmente se perguntar o que é e como é que se avalia essa "resistência" a entrar em movimento.

Não se assuste. Voltaremos com mais detalhes ao assunto no início da Dinâmica.

Mas desde já eu posso adiantar que essa "resistência" será medida pela aceleração, ou melhor pelo inverso da aceleração do corpo que entra em movimento.

Atratibilidade e inércia são dois atributos da matéria. Não tendo nenhuma razão para diferenciá-los, o Físico postula que são manifestações de uma mesma e única grandeza que se chama massa.

Massa, comprimento e tempo são as três grandezas fundamentais da Mecânica.

I-3 Unidades.

É a atração gravitacional que é utilizada para medir as massas.

Em realidade não se mede a massa: mede-se a fôrça de atração exercida pela Terra sôbre o corpo.

A medição é uma comparação: compara-se a fôrça de atração exercida pela Terra sôbre o corpo com a fôrça de atração exercida pela Terra sôbre um

corpo padrão.

A comparação é feita por meio de uma balança. Você já conhece a balança de braços iguais. Quando a balança está equilibrada a Terra exerce fôrças iguais sôbre os corpos colocados nos dois pratos.

Conclui-se então que aquêles corpos têm a mesma massa.

O corpo padrão utilizado para a medição das massas é um cilindro de platina guardado em um Laboratório de Metrologia em Paris.

A unidade de massa é o quilograma.

O cilindro de platina conservado em Paris é o quilograma padrão.

Os comprimentos são medidos por comparação com o comprimento de uma régua graduada escolhida como unidade. Sua unidade é o metro.

Até 1960, o padrão de comprimento era uma régua de platina conservada também naquêle Laboratório de Metrologia em Paris.

<u>Cá entre nós</u>: A platina é um metal raro. Na sua opinião, porque fizeram o quilograma-padrão e o metro padrão de platina?

Em 1960 no entanto, os especialistas em Metrologia decidiram mudar de padrão primário: a régua de platina foi substituída pelo comprimento de onda de uma radiação emitida pelo átomo do elemento Cripton, isótopo 86.

A barra de platina de Paris passou então a ser padrão secundário.

Isto significa que seu comprimento foi definido em têrmos do comprimento de onda da radiação do Cripton: a barra de platina contém 1.650.763,73 comprimentos de ondas.

<u>Cá entre nós</u>: Tudo isto deve lhe parecer bastante complicado. É mesmo. E não há meio de lhe dar agora uma explicação razoável.

Consequentemente se você achar o assunto maçante, passe adiante, lembrando-se sòmente do seguinte:

1) o metro-padrão de Paris continua sendo o padrão "técnico", digamos.
2) a razão profunda da mudança é que a Ciência procura padrões que se possam definir e reproduzir da maneira mais fiel possível.

Você há de convir que um padrão baseado diretamente sôbre o átomo é muito mais "natural" que uma barra de platina.

E quem reproduz é a própria Natureza...

A unidade de tempo é o segundo.

Como o seu colega comprimento, o padrão de tempo tem uma história movimentada.

O problema era achar um fenômeno natural repetitivo e tal que o período de repetição fôsse constante.

O homem préhistórico devia medir o tempo em dias: noite, dia, noite, dia... Repetição. Periodicidade? Sim, aproximadamente.

O tempo do Cientista mediu-se também em dias durante mais de um século.

Ou melhor, em frações iguais a 1/86.400 de um dia, que eram segundos.

Passou-se depois ao ano, mais regular que o dia.

E de novo o átomo está surgindo para fornecer o padrão de tempo do futuro: o segundo está se tornando um padrão secundário.

Êle é definido agora como valendo 9.192.631.770 períodos de uma radiação emitida pelo elemento Césio, isótopo 133.

As unidades das grandezas derivadas são definidas em têrmos das unidades das grandezas fundamentais. Você as encontrará à medida que progredirmos no nosso caminho.

O conjunto das unidades fundamentais e das unidades derivadas constitui um Sistema de unidades.

O Sistema cujas unidades fundamentais são o quilograma (kg) o metro (m) e o segundo (s) é o Sistema Internacional de Unidades (SI), único Sistema legal hoje em dia.

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Todos os problemas propostos nêste Capítulo devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

I-1 - Eu sugeri no texto que você pode medir o comprimento de sua mesa de trabalho com um lápis.

Discuta as vantagens (se houver) e os inconvenientes (se houver) de escolher um lápis como padrão de comprimento.

I-2 - Diz-se muitas vêzes que a massa de um corpo mede a quantidade de matéria contida no corpo.

Faça um exame crítico dessa "definição". Comece por definir, evidentemente, o que você entende por quantidade de matéria.

I-3 - Em relação ao problema precedente, se alguém lhe propusesse contar os átomos de um corpo e definir como medida da massa do corpo o número assim obtido, qual seria a sua reação?

I-4 - Um "conhecido cientista" propõe (ver o jornal de amanhã) mudar o padrão de massa, escolhendo-se o eletron em vez do cilindro de platina de Paris. Critique essa sugestão. (Peça ao seu Professor que lhe conte algo a respeito do eletron, e que lhe indique alguma bibliografia para você ler).

I-5 - Suponha que você queira medir o comprimento da sua mesa de trabalho tomando como unidade de comprimento uma das dimensões da sua carteira de estudante.

Indique um processo operacional para efetuar a medida. (O que vem a ser processo operacional? Informe-se...).

I-6 - Suponha que o dia que começa hoje às 12:00 horas esteja contido 365,2 vêzes no ano que começou no dia primeiro de Janeiro.

Como seria afetado o número acima se a unidade de tempo fôsse definida a partir do período de uma radiação emitida por um outro átomo que não seja o Césio 133?

I-7 - Há dois dias "possíveis". O dia solar e o dia sideral. Peça ao seu professor que lhe explique como são definidos êsses dois dias.

I-8 - Desenhe um triângulo retângulo ABC (chame B o vértice do ângulo reto). Você aprenderá em Matemática que o "seno" do ângulo Â é definido pela razão BC/AB. O que quer dizer isto, em têrmo de unidades?

I-9 - É pena que a gente não possa ter conversado mais demoradamente à respei

to da mudança dos padrões de tempo e comprimento... Uma das razões que levou à mudança da definição do segundo é que o movimento diurno de rotação da Terra não é uniforme. A Terra é um relógio que vai atrazando. Imagine só! (No entanto, não há motivo para assustar-se. O dia aumenta de um segundo em cada 100.000 anos, mais ou menos).

Você seria capaz de imaginar alguma razão para êsse atrazo?

I-10 - Eu não lhe aconselhei a ler o "Pequeno Príncipe"? Pois bem, aqui está um trecho dessa obra prima:

... "Os adultos gostam de números. Quando você fala com êles de um novo amigo, êles nunca lhe perguntam a respeito do essencial. Êles nunca lhe dizem: "qual é o timbre da sua voz? quais são as brincadeiras que êle prefere? será que êle coleciona borboletas?" Êles lhe perguntam: "que idade tem? quantos irmãos tem? quanto pesa? quanto ganha seu pai?" Sòmente então êles acreditam <u>conhecê-lo</u>."...

O grifo de <u>conhecê-lo</u> é meu.

Discuta êsse aspecto do "conhecimento", do ponto de vista do poeta (o Pequeno Príncipe), e do ponto de vista de um Cientista.

CAPÍTULO II

A EXPRESSÃO NUMÉRICA DA MEDIDA FÍSICA

II-1 Da necessidade de saber expressar o resultado de uma medida.

Você aprendeu no Capítulo I que uma "observação" traduz-se por um conjunto de medidas sôbre uma ou várias grandezas físicas.

Em consequência é preciso primeiro saber utilizar instrumentos e aparelhos usados nos vários processos de medição.

Os mais simples você já sabe, ou não tardará em saber: a régua graduada, o relógio, a balança...

Os mais complicados, eu não posso lhe ensinar em um livro. Só há um jeito mesmo: você entrar em um laboratório e aprender fazendo.

Cá entre nós: Por favôr, não vá criar uma psicose por não poder, por enquanto, utilizar aquêles aparelhos bonitos e complicados... e horrìvelmente caros.

Afinal das contas, aquêle monumento de Ciência erigido por Tycho Brahé, Kepler, Galileu e o grande Newton foi construído com réguas graduadas, balanças e relógios (e que relógios, comparados com o mais ordinário dos nossos!)

Eu ia esquecer: acrescente uma imensa vontade de aprender, uma curiosidade insaciável.

E uma paciência infinita.

E uma humildade absoluta.

E um grão de gênio, se possível...

Em segundo lugar, é preciso que você saiba expressar o resultado da medida que você está fazendo.

Faça a experiência que eu vou descrever a seguir.

Mas faça mesmo. Sem o que, você não vai entender mesmo o que eu estou tentando lhe ensinar agora.

Procure uma fôlha de cartolina.

Não tem cartolina? Não faz mal. Papel também serve.

Recorte com tesoura uma tira de uns 25 cm de comprimento e de 3 a 4 cm de largura.

Gradue um dos lados de centímetro em centímetro, como na Fig. II-1.

Essa é a régua graduada que você vai utilizar.

Vai utilizá-la para medir o comprimento de um objeto qualquer.

Eu por exemplo, pretendo medir o comprimento de um calendário de plástico que eu guardo na minha carteira.

É uma propaganda distribuída por um Curso de Inglês (Audio-Visual).

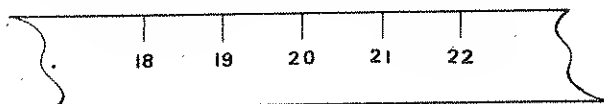



Figura II-1

<u>Cá entre nós</u>: A propósito, você sabe Inglês? Ou a prende?

Conselho de amigo: aprenda Inglês. Você precisará mais tarde para saber o que há de novo na sua Profissão em outros lugares.

E Francês também.

Pelo mesmo motivo.

E para poder ler "O Pequeno Príncipe" no original.

É muito mais bonito.

Bem, mas eu estava querendo medir o comprimento do meu calendário.

Eu coloco o calendário sôbre a mesa e ponho a tira de cartolina graduada por cima, como na Fig. II-2.

Eu faço coincidir uma graduação qualquer da tira de cartolina com a borda esquerda do calendário.

A graduação 5 por exemplo.

Eu tomo o maior cuidado para que a borda superior do calendário seja paralela à borda graduada da tira de cartolina.

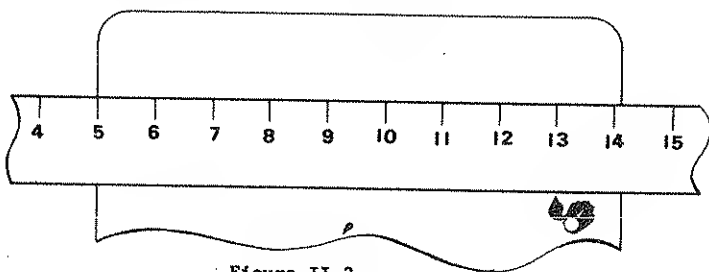



Figura II-2

E finalmente eu conto quantos centímetros são contidos no comprimento que eu estou medindo.

Nove centímetros e alguma coisa.

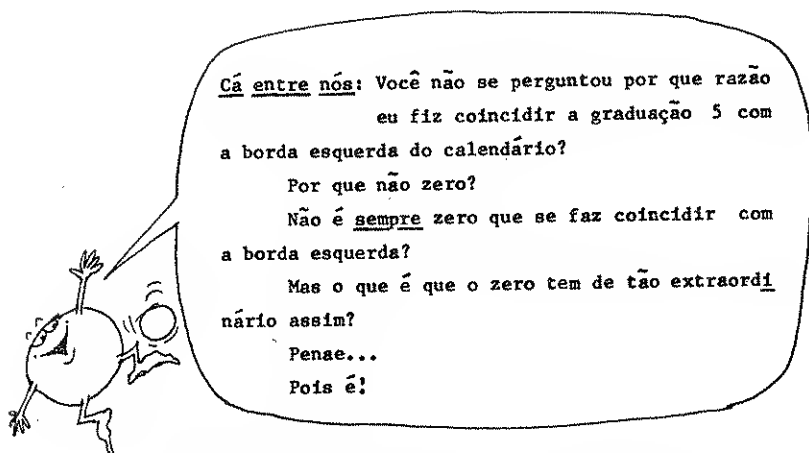
Quanto vale êsse "alguma coisa"?

De um a dois décimos de centímetros, ou seja, de um a dois milímetros. Está de acôrdo?

Talvez mais próximo de dois que de um.

Eu escrevo então, chamando o comprimento do calendário ℓ:

$$\ell = 9,2 \text{ cm}$$

Mas espere aí. Você não acha que vale a pena confirmar isso por outra medida? Não custa nada, não é?

Eu recomeço, fazendo coincidir agora a graduação 8 com a borda esquerda (Fig. II-3). E eu acho:

$$\ell = 9.1 \text{ cm}$$

Catástrofe!

A propósito, do momento que você está fazendo a experiência ao mesmo tempo que eu, quanto é que você achou?

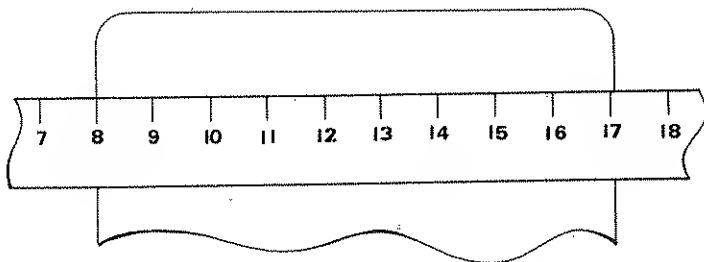



Figura II-3

Você vai agora parar de ler para meditar sôbre êsse fato: eu acabo de achar dois valores diferentes para a medida do mesmo comprimento (e você também provàvelmente).

Você vai meditar; você vai procurar tôdas as razões possíveis ou prováveis que possam explicar êsse fato.

Muito bem, o que é que você está achando?

Eu acho que você está de acôrdo comigo: temos que repetir várias vêzes essa medida.

E ver o que acontece.

Aqui estão os meus resultados, para dez medidas (em centímetros):

9,2 9,1 9,0 9,1 9,1 9,1 9,0 9,0 9,0

E onde estão os seus?

Pergunto agora: o que vamos fazer com êsses dez números?

Êles não são todos diferentes, aliás. Êles se repartem em três grupos. Um grupo de 9,2 cm, com uma medida. Um grupo de 9,1 cm com cinco medidas. Um grupo de 9,0 cm, com quatro medidas.

Mas como é que eu vou expressar a medida do comprimento de meu calendário?

É necessário resolver êsse problema.

Caso contrário eu não conhecerei o comprimento do calendário.

Cá entre nós: Talvez seja interessante que você volte ao problema I-10 do Capítulo I.

Se você não discutiu ainda êsse problema, está em tempo.

E consequentemente eu não poderei comunicar essa informação a ninguém.

II-2 Questão de confiança.

Em dez medidas diferentes do comprimento de meu calendário eu encontrei, não dez medidas diferentes, mas três grupos diferentes de medidas.

Qual dos três é o bom?

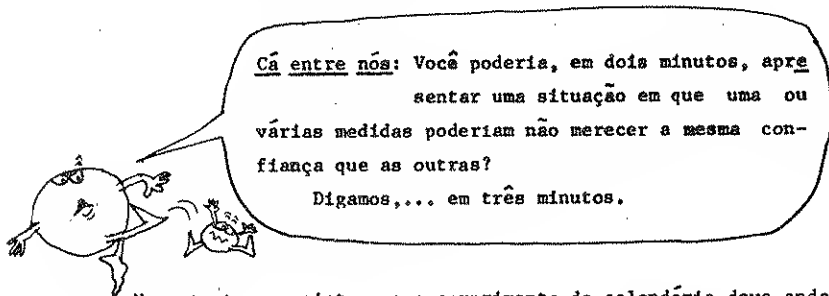
É òbviamente uma questão de confiança.

O grupo bom é o grupo de medidas no qual eu tenho a maior confiança

Como? Você está dizendo que você não tem nenhuma razão de ter mais confiança em certas medidas que em outras?

Bem, no fundo eu estou de acôrdo com você.

Eu estou perfeitamente consciente de ter construído minha régua graduado com o máximo de cuidados, e de ter efetuado tôdas as medidas com a mesma atenção, a mesma seriedade, e a mesma honestidade.

De modo que você tem razão. Não há mesmo porque preferir um grupo de medidas a outro.

No entanto, eu sinto que o comprimento do calendário deve andar lá pela casa de 9,1 cm.

E você, com as suas medidas?

Você sabe o que vamos fazer? Já adivinhou?

Certo! Vamos calcular a média aritmética das dez medidas.

$$\frac{9,2 + 5 \times 9,1 + 4 \times 9,0}{10} = 9,07 \text{ cm}$$

Quer dizer que o comprimento verdadeiro do calendário é 9,07 cm?

De jeito nenhum. Sinto muito amigo.

Em primeiro lugar, você vê, essa história de "comprimento verdadeiro" não tem nenhum sentido em Física.

O comprimento (sem adjetivo) é expresso por um número "tirado" de uma série de medidas por um conjunto de regras que você não precisa conhecer agora em detalhes.

Uma dessas regras é a da média aritmética.

Mas quer ver uma coisa? Repita mais dez vêzes as suas medidas. Aí vou eu: 9,1 9,1 9,1 9,2 9,0 9,0 9,2 9,1 9,1 9,1 e aí vai a média:

$$\frac{2 \times 9{,}2 + 6 \times 9{,}1 + 2 \times 9{,}0}{10} = 9{,}10 \text{ cm}$$

Você entende agora porque eu lhe disse que "comprimento verdadeiro" não tem sentido em Física?

Muito bem, como é que vamos expressar nossa medida?

Pela primeira série de dez medidas, eu diria: 9,07 cm, mais ou menos.

Pela segunda série de dez medidas, eu diria: 9,10 cm, mais ou menos.

Uma terceira série me daria talvez como média: 9,08 cm.

E uma quarta, talvez 9,06 cm.

E uma quinta, talvez 9,09 cm.

<u>Cá entre nós</u>: Eu acho que não é preciso fazer muita fôrça para convencer você que as médias são menos "espalhadas" que as medidas individuais em cada série, não é?

Pense bem.

Está convencido?

De modo que tanto faz 9,07 ou 9,10 ou 9,08....

À condição de dar a "margem", ou a "faixa" dentro da qual tôdas essas médias devem muito provàvelmente se encontrar.

Há também regras para determinar essa faixa.

Mas você não vai aprendê-las agora. Tenha paciência. Temos coisas mais urgentes para fazer.

Sôbre tudo que nessa altura um pouco de atenção e de bom-senso são geralmente suficientes.

Eu diria que a média não deve flutuar mais que meio milímetro de um lado ou do outro.

É aliás a margem dentro da qual situamos nossas medidas. Quando você avalia 9,2 cm, na Fig. II-2, você não quer mesmo dizer que o que você está lendo está entre 9,15 e 9,25 cm?

Então eu vou dizer que o comprimento da carteira é, por exemplo:

$$9{,}08 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

Mas não é engraçado que se eu tivesse feita a segunda série de medidas antes da primeira (e então passaria a ser a primeira... mas vamos parar por aí), eu teria escrito com a mesma seriedade 9,10 ± 0,05 cm?

Pois é! E ambos os resultados têm o mais sagrado direito de serem chamados: "expressão numérica da medida do comprimento do calendário".

Para simplificar o mais possível eu vou então escolher:

$$\ell = 9{,}10 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

O que significa que o comprimento fornecido pela série de medidas que eu fiz é maior que 9,05 cm e menor que 9,15 cm.

Mas veja, se eu escrevesse simplesmente 9,1 cm (não 9,10, cuidado!), não é exatamente isso que eu estaria dizendo?

Que o comprimento é mais próximo de 9,1 cm que de 9,0 cm ou de 9,2 cm?

E consequentemente está entre 9,15 cm e 9,25 cm?

Pois bem, bastará então escrever

$$\ell = 9{,}1 \text{ cm}.$$

II-3 Algarismos significativos.

Ao fornecer 9,1 cm como resultado numérico de uma medida, eu quero dizer que o meu "conhecimento" do comprimento o situa entre 9,05 e 9,15 cm .

Eu não quero dizer que é 9,1 cm.

Cá entre nós: Nessa altura, você já começa a ter uma idéia do que é medir em Física?

Eu não estou falando da técnica.

Eu estou me referindo ao conceito.

Eu não estou pretendendo que seja muito fácil, não.

Você deve deixar amadurecer essas idéias. Leia de novo a seção II-2.

E pare muitas vêzes para pensar.

E porque não discutir disso em casa? Com os seus colegas?

E com o seu Professor, claro.

Se eu dissesse que o comprimento é de 0,091 m, eu não tiraria nem poria nada à informação precedente.

Ela seria sòmente fornecida em outra unidade.

Mas se eu dissesse que o comprimento é 9,13 cm, aí então a coisa mudaria.

Eu estaria dizendo que minhas medidas me permitem "enquadrar" o comprimento entre 9,125 e 9,135 cm.

Reduzindo assim a faixa de incerteza.

Ou seja, aumentando a precisão.

Da mesma forma, 9,10 cm não é a mesma coisa que 9,1 cm.

Se eu digo 9,1 cm, eu situo o comprimento entre 9,05 e 9,15 cm.

Se eu digo 9,10 cm, eu situo o comprimento entre 9,095 e 9,105 cm.

Concluímos de tudo isto que:

1º) os zeros situados por ventura à esquerda do número que expressam a medida não dão nenhuma informação quanto à precisão da medida. Êles aparecem ou desaparecem ao sabor das mudanças das unidades utilizadas para expressar a medida.

2º) com exceção dêsses zeros, todos os outros algarismos fornecidos são necessários para expressar corretamente a confiança que eu tenho no resultado que eu comunico.

Todos os outros algarismos tem significação na soma de informações transmitidas pelo meu resultado numérico.

E por causa disso, todos êsses outros algarismos são chamados **algarismos significativos** da expressão numérica da medida.

Lembre-se: vale tudo, com exceção dos zeros à esquerda!

Eu medi o comprimento do meu calendário com uma régua graduada em centímetros, avaliando o décimo de centímetro (milímetro) "a olho" e eu achei 9,1 centímetros... ou 0,91 decímetro... ou 0,091 metro... ou 0,00091 hectômetro... ou 0,000091 quilômetro...

E o resultado dessa medida está expresso com **dois** algarismos significativos, qualquer que seja a unidade utilizada.

Eu meço agora com uma régua graduada em milímetros, avaliando o décimo de milímetro "a olho", e eu acho 9,09 centímetros... ou 0,0909 metro.... ou 0,0000909 quilômetro...

E tudo isso está expresso com **três** algarismos significativos.

Diga-me agora: se eu lhe dissesse que o raio da Terra é de 6370 quilômetros, com quantos algarismos significativos estaria eu lhe fornecendo essa informação?

Cá entre nós: Você acha que é razoável fornecer a medida do raio da Terra com êsse número de algarismos significativos?

Pense bem.

Eu tinha dado essa aula, na semana passada.

E eu esperava ter encerrado o assunto.

Mas veio o Martins. Êste não perdôa.

Cá entre nós: Permita-me lhe apresentar o Martins. O Martins e eu somos bons amigos.

Eu lhe ensino um pouco de Física.

E êle me ensina a ensinar.

MARTINS E EU

01

PROFESSOR, ÊSSE NEGÓCIO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS É FOGO!

HEIM? HEIM?

O SENHOR NÃO PODERIA FAZER UM DESENHO PRA EXPLICAR?
QUE DESENHO MEU DEUS?

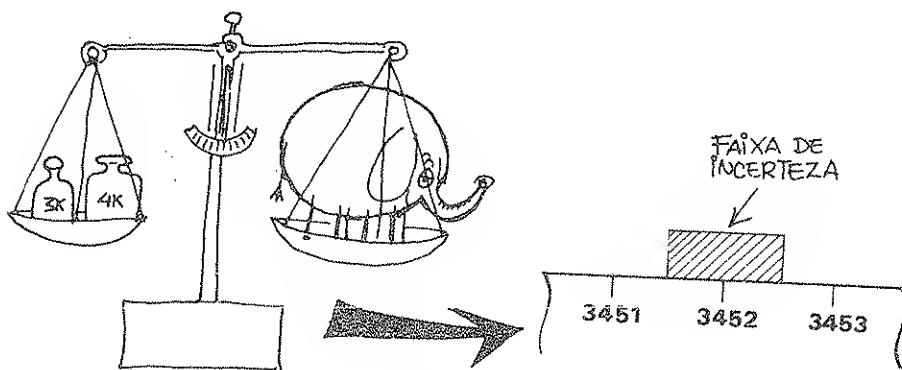
O SENHOR NÃO DESENHOU OS ELEFANTES PARA A ATRAÇÃO GRAVITACIONAL?

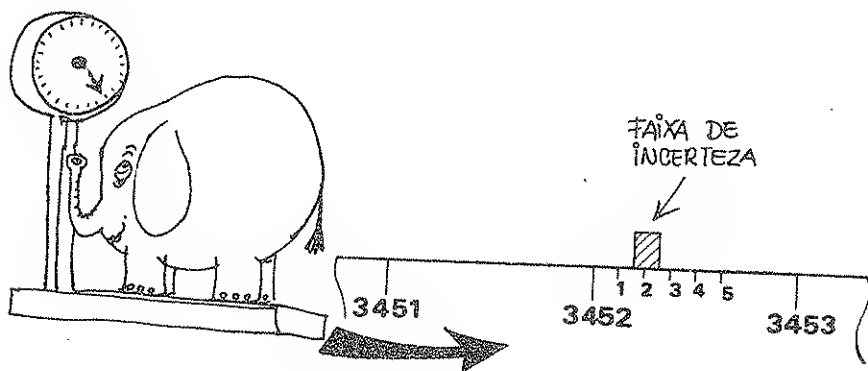
RÉ! RÉ! RÉ!

GULP!

Então, já que Martins gosta de elefantes, lá fui eu. E deu mais ou menos o seguinte:

Uma primeira série de medidas da massa do elefante me dá 3452 kg.

Quatro algarismos significativos. Isto significa que eu enquadro a massa da maneira seguinte:

Uma segunda série de medidas da massa do elefante, efetuada com outra balança, me dá 3452,2 kg.

Cinco algarismos significativos. Isto significa que eu enquadro a massa da maneira seguinte:

MARTINS E EU 02

II-4 <u>Potências de dez</u>.

Medindo a massa do elefante com aquela primeira balança eu achei 3452 kg.

Suponha que eu queira expressar a massa em gramas em vez de expressá-la em quilogramas. Como um quilograma equivale a mil gramas eu escrevo com tôda tranquilidade: "A massa do elefante expressa em gramas é 3.452.000 gramas".

Mas isto está errado!

<u>Cá entre nós</u>: Por favôr, <u>não leia mais adiante</u>.

Pare um instante e descubra você mesmo por quê está errado.

Você sabe.

Se hesitar, volte a ler de novo a seção precedente (II-3).

Você descobriu?

Certo! Está errado porque ao escrever 3.452.000 gramas eu estou fornecendo a informação "massa do elefante" com sete algarismos significativos.

Ou seja, com uma faixa de incerteza de uma grama.

Porém a medida que eu efetuei, isto é, o ato físico, dava uma faixa de incerteza de um quilograma.

Obviamente, uma manipulação aritmética (passagem de uma unidade para outra), não pode alterar o resultado do ato físico.

Uma simples mudança de unidades não pode diminuir a faixa de incerteza de massa medida. Ou aumentá-la, aliás.

Isso seria mágica e não Física, não é?

De modo que temos que achar outra coisa para expressar a massa do elefante em gramas.

Veja, eu poderia talvez escrever assim:

3452 (mil gramas)

O número de algarismos significativos que eu forneço continua sendo quatro, como deve ser.

Mas evidentemente não é muito prático. Porque iríamos encontrar massas expressas em (dez gramas), (cem gramas), (mil gramas)...

Você já imaginou uma soma tal que

34,5 (dez gramas) + 203 (cem gramas)?

O remédio é utilizar potências de dez.

Eu não irei até dizer que as potências de dez foram inventadas para isso, não. Mas que vieram a calhar não há dúvida!

Como é então que vamos fazer para expressar a massa do elefante?

Do momento que mil = 10^3 escreveremos simplesmente:

$$3452 \times 10^3 \text{ gramas}$$

<u>Cá entre nós</u>: Ou você já está familiarizado com as potências de dez e então não há problema.

Ou você as ignora e então só há uma solução.

Pedir ao seu Professor que lhe dê uma preleção sôbre o assunto.

Sem alterar o número de algarismos significativo, (e é isto que realmente importa) poderíamos também escrever:

$345,2 \times 10^4$ gramas, ou $34,52 \times 10^5$ gramas, ou $3,452 \times 10^6$ gramas, ou $0,3452 \times 10^7$ gramas...

Um instante. Êsse $0,3452 \times 10^7$ gramas têm o número correto de algarismos significativos?

Sim, claro. Os zeros à esquerda não contam. Lembra?

Para pôr um pouco de ordem em tudo isto, costuma-se adotar a seguinte convenção: os algarismos significativos são representados por um número entre um e dez, a não ser que isso implique em multiplicar pela potência um de 10 (isto é por 10). Nêsse caso, representa-se a medida por um número entre um e cem.

Espere um pouco, já sei! (O Martins já estava levantando frenèticamente o braço).

Aquilo que eu escrevi não é lá essas còisas do ponto de vista da clareza. Desculpe por não ter explicado melhor.

Mas talvez alguns exemplos ajudarão:

1 - Se uma série de medidas fornece o valor 345,2 m para um comprimento ℓ, escreveremos

$$\ell = 3,452 \times 10^2 \text{ m}$$

2 - Se uma série de medidas fornece o valor 4532,6s para um intervalo de tempo Δt (leia "delta t"), escrevèremos

$$\Delta t = 4,5326 \times 10^3 s$$

3 - Se uma série de medidas fornece o valor 0,788 kg para uma massa m, e se quisermos expressar o resultado em gramas, escreveremos

$$m = 7,88 \times 10^2 \ g$$

4 - Mas se uma série de medidas fornece o valor 34,2 m para um comprimento ℓ eu escreverei

$$\ell = 34,2 \ m \quad \text{e não} \quad \ell = 3,42 \times 10 \ m$$

As potências de dez são também muito úteis para simplificar a escritura de valôres menores que um.

Eu estou escrevendo com um lápis cujo comprimento é 17,3 cm.

Se eu quiser expressar o comprimento em metros, eu escrevo 0,173 m.

Em quilômetros? 0,000173 km.

A espessura de uma lâmina de barbear é 0,10 mm.

Querendo expressar essa espessura em metro (e não esqueça que o me-

tro é a unidade de comprimento do Sistema Internacional), eu terei que escrever: 0,00010 m.

Você não acha que são muitos zeros inúteis?

Porque nêste caso não se trata de conservar ou não o número correto de algarismos significativo. Os zeros à esquerda não contam.

Não é então muito mais simples escrever $1,0 \times 10^{-4}$ m?

Expressa na unidade do SI, a carga elétrica do eletron é expressa pelo número: 0,000000000000000000160.

Convenhamos que é mais expedito escrever $1,60 \times 10^{-19}$.

Da mesma forma, em vez de 0,000403 kg escreveremos $4,03 \times 10^{-4}$ kg.

Em vez de escrever 0,0215m escreveremos $2,15 \times 10^{-2}$ m.

Em vez de escrever 0,0000310 s escreveremos $3,10 \times 10^{-5}$ s.

E em vez de escrever 0,000000000000000000000000000000911 kg escreveremos $9,11 \times 10^{-31}$ kg.

A propósito, a massa acima é a massa do eletron.

Já descobriu a regra prática? O expoente de 10 é "menos o número de zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo, incluindo-se o zero antes da vírgula".

II-5 Operações com resultados de medidas físicas.

Até agora falamos exclusivamente de medidas de comprimento, de tempo e de massa.

Falamos de medidas efetuadas diretamente.

Mas nem tôda grandeza física pode ser medida diretamente.

Por exemplo, se eu quiser saber qual é a área de uma fôlha de papel, eu não posso medir diretamente essa área.

Eu devo medir o comprimento e a largura, e multiplicar.

Vamos então ao cálculo (e não à medida) da área da fôlha.

A medida do comprimento é 15,2 cm. A medida da largura é 12,4 cm.

O valor da área é: 15,2 x 12,4 = ...

Eu ia escrever 188,48 cm^2 ou melhor $1,8848 \times 10^2$ cm^2, como aprendemos ainda há pouco.

É evidentemente o resultado matemático da multiplicação.

Mas ao escrever 188,48 cm^2 eu estou fornecendo a informação "área da fôlha" com cinco algarismos significativos.

Ora vejamos. Quando eu escrevo 15,2 cm como medida do comprimento eu estou enquadrando êsse comprimento entre 15,15 e 15,25 cm.

Quando eu escrevo 12,4 cm como medida da largura eu estou enquadrando essa largura entre 12,35 e 12,45 cm.

E tudo isso quer dizer que eu estou admitindo como faixa de incerteza, para a área da fôlha, a área da zona sombreada da Fig. II-6.

Você observa que essa zona está compreendida entre o retângulo de 15,15cm por 12,35cm por um lado, e o retângulo de 15,25cm por 12,45cm por outro lado.

O retângulo menor tem área aproximadamente igual a 187 cm^2.

O retângulo maior tem área aproximadamente igual a 190 cm^2.

De modo que a faixa de incerteza sôbre a área é mais ou menos 3 cm^2.

Você entende agora que seria absurdo dar à área da fôlha o valor $1,8848 \times 10^2 cm^2$, o que indicaria uma faixa de incerteza de um centésimo de centímetro quadrado!

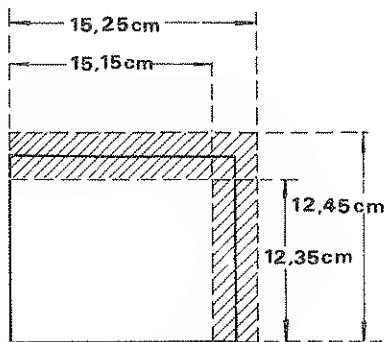
Figura II-6

Dar $1,9 \times 10^2 cm^2$ seria admitir uma faixa de incerteza de $10cm^2$. É evidentemente muito. Estaríamos sonegando informação à respeito da área.

Forneceremos então $188cm^2$ como medida da área, ou melhor $1,88 \times 10^2$ cm^2 e escreveremos:

área da fôlha: $= 15,2 \times 12,4 = 1,88 \times 10^2\ cm^2$.

Talvez exagerando um pouco em sentido contrário.

Mas seguindo uma regra muito simples, e marcada pelo bom senso: dê o resultado com o mesmo número de algarismos significativos que os dados.

MARTINS E EU

03

II-6 O que é que vamos fazer com isto?

Paremos um instante para ver em que ponto estamos.

Aprendemos que o número que expressa a medida de uma grandeza física "reflete" os resultados obtidos em várias observações feitas sôbre essa grandeza.

Calcula-se a média aritmética das medidas sucessivas.

E escreve-se essa média com o número de algarismos significativos coerente com a técnica utilizada nas observações efetuadas.

O uso sistemático de potências de dez permite conservar sempre o número correto de algarismos significativos, qualquer que seja a unidade utilizada.

Muito bem. Eu tenho na minha mesa dois objetos de mesma forma e, à primeira vista, com as mesmas dimensões.

Ambos têm aspecto metálico; ambos são brilhantes, reluzentes...

Na Fig. II-7, o brilho fica por conta da sua imaginação .

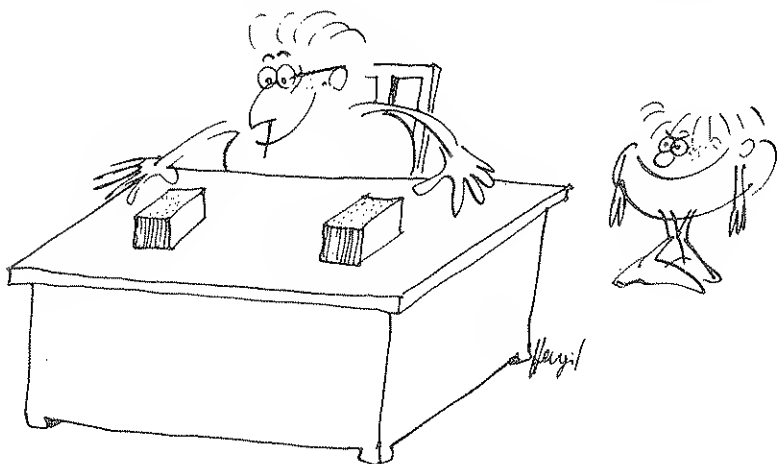



Figura II-7

Um dos objetos está marcado (1). E o outro está marcado (2).

Eu lhe peço de medir a massa de cada um dêsses objetos.

E eu ponho a sua disposição duas balanças: uma delas é uma balança comum, barata. Ela é sensível a uma grama (*).

A outra é uma balança mais aperfeiçoada. Ela é sensível a um miligrama.

O que é que você vai fazer?

Cá entre nós: Isto é extremamente importante.
Mais uma vêz, não se trata de técnica, e sim de conceito.
Antes de efetuar qualquer medida você deve me perguntar algo.
O que é?

Você já sabe o que você deve me perguntar?

Certo! Você deve me perguntar:

"O que é que vamos fazer com essa medida?"

Eu lhe respondo então:

"Eu quero vender êsses objetos. O objeto marcado (1) é de platina. O objeto marcado (2) é de aço".

Bem. O que é que você vai fazer agora?

Cá entre nós: Responda a essa pergunta antes de prosseguir.

(*) Isto significa que é preciso pôr no prato uma massa de pelo menos uma grama para notar um desvio do ponteiro.

Você vai raciocinar mais ou menos assim: "Platina é um metal caríssimo. A miligrama custa um dinheiro apreciável. Eu vou medir a massa do objeto de platina com a balança sensível ao miligrama.

Aço é um metal barato. A grama custa menos que uma caixa de fósforos.

Eu poderia evidentemente medir a massa do objeto de aço com a balança sensível ao miligrama.

Mas o que é que o Professor iria fazer com isto?

Eu iria fornecer-lhe um número de algarismos significativos sem interêsse para o que êle quer fazer.

Em consequência eu vou medir a massa do objeto de aço com a balança sensível à grama".

Chegamos então à conclusão seguinte: medida só tem realmente sentido quando colocada no contexto de intenções, no conjunto de circunstâncias que a impõem e que a justificam.

Não se mede nada sòmente pelo prazer de medir.

Mede-se algo porque o conhecimento da medida é um passo necessário no caminho seguido para determinado objetivo.

A venda de um pedaço de metal.

Ou a pesquisa de uma lei Física.

Se eu quero vender o meu pedaço de platina eu medirei a massa com uma faixa de incerteza de um miligrama, e eu direi que a medida da massa é:

$$7{,}40452 \times 10^2 \text{ grama.}$$

Mas suponha que eu queira calcular a massa específica da platina.

<u>Cá entre nós</u>: A massa específica ρ de uma substância é a razão entre a massa m e o volume V de uma amostra da substância:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Lembre-se disto. Você precisará muitas vêzes dessa definição.

Qual é a unidade de massa específica?

O quilograma por metro cúbico (kg/m^3), evidentemente.

A massa específica da água é $1,0 \times 10^3$ kg/m^3.

Medidas preliminares do volume me deram 34 cm^3, com dois algarismos significativos, sòmente.

O que é que adiantaria conhecer a massa da platina com seis algarismos significativos?

Eû meço então essa massa com faixa de incerteza de uma grama, obtendo $7,40 \times 10^2$ g.

E agora suponha que eu queira saber se eu posso suspender o pedaço de platina por um barbante sem que o barbante quebre. E eu sei que êle quebra quando se suspende uma massa de 5 kg.

Eu não preciso usar balança. Eu pego o pedaço de platina na mão e a minha "memória" neuro-muscular me diz:

a massa é 1kg, ou 1×10^3 grama.

Três experiências. Três objetivos diferentes. Três expressões numéricas diferentes da massa do pedaço de platina.

Qual é a melhor?

Certo. Não há melhor medida.

Os três números representam de direito a massa do pedaço de platina.

Isso não significa que você vai usar indistintamente qualquer um dos três.

Depende do que você quer fazer com a medida.

II-7 Ordens de grandeza.

Um automóvel passa na estrada.

Eu lhe pergunto. "Qual é a velocidade do automóvel?"

E você me responde: "Não sei".

Mas você sabe, sim. Para o que eu quero fazer com a medida que eu lhe peço, você sabe.

Eu não quero nenhum algarismo significativo. Eu quero somente uma potência de dez.

Então, o carro anda a 10^1 km/h, a 10^2 km/h, a 10^3 km/h?

Como? Você está dizendo que, a escolher entre os três, você escolhe 10^2 km/h?

Ótimo! Você acaba de me dar a ordem de grandeza da velocidade do automóvel.

Quantos grãos de café há em um saco de 60 kg?

Raciocinemos juntos: um grão de café deve ter uma massa da ordem de uma grama. Com sessenta mil gramas por saco, teríamos sessenta mil grãos. Isto dá 10^4 como ordem de grandeza.

Qual é a espessura de uma fôlha dêste livro?

Vejamos. Cem páginas, ou seja cinquenta fôlhas, têm uma espessura de meio centímetro mais ou menos. Isto dá um décimo de milímetro por fôlha. Ordem de grandeza: 10^{-1} mm, ou 10^{-4} m.

Qual é a ordem de grandeza do comprimento do equador terrestre?

Você deve saber que o equador mede 4.0×10^{4} km, ou 4.0×10^{7} m. A ordem de grandeza é 10^{7}m ou 10^{8}m? Onde está a "linha divisória" entre duas ordens de grandeza consecutivas?

Por razões que eu não posso lhe explicar agora, mas que você aprenderá mais tarde, a linha divisória é $\sqrt{10} = 3,16$. (Fig. II-8).

De modo que a ordem de grandeza do comprimento do equador terrestre é 10^{8} m.

A procura de ordens de grandeza é não sòmente um passatempo gostoso. É um excelente treino de observação e de bom senso.

É um hábito que você deve cultivar.

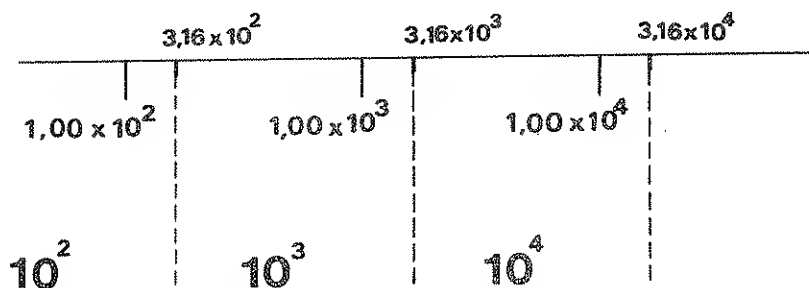



Figura II-8

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas "estrelados" (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

*II-1 - Discuta a seguinte série de medidas do comprimento de uma fôlha de papel, feitas por um colega:

30,41 cm	30,40 cm	30,39 cm	30,40 cm	30,42 cm
30,41 cm	30,49 cm	30,41 cm	30,40 cm	30,40 cm

II-2 - Você mede a massa de uma borracha com uma balança e uma caixa de pêsos cuja unidade menor é uma grama. Vinte e sete gramas é pouco. Vinte e oito gramas é muito. Expresse corretamente o resultado de sua medida.

*II-3 - Experiência: Construa um pêndulo com uma pedra e um barbante. Procure um cronômetro emprestado. Meça o tempo que leva o pêndulo para efetuar uma oscilação completa de ida e volta (um período). Repita 20 vêzes a medição.

Expresse corretamente o valor do período do pêndulo dado por essa série de medidas.

*II-4 - Experiência: Repita a experiência precedente, porém em vez de medir um período de cada vez, meça o tempo correspondente a dez oscilações (dez períodos). Repita 20 vêzes essa medição de dez períodos.

Expresse corretamente o valor do período do pêndulo dado por essa série de medidas.

Compare criticamente êsse processo com o processo do problema precedente.

II-5 - Qual é o número de algarismos significativos nas seguintes expressões numéricas de medidas de massa?

a) 4,80 kg. d) 80,4 kg. g) $6{,}0130 \times 10^{3}$kg.
b) 3,4 g. e) 3,00 kg. h) 4×10^{-3}kg.
c) 0,03040 kg. f) $4{,}732 \times 10^{-2}$kg.

II-6 - Qual é o número de algarismos significativos nas seguintes expressões numéricas de medidas de comprimento?

a) $3{,}0010 \times 10^{4}$m. d) $4{,}1 \times 10^{2}$ km.
b) $7{,}100 \times 10^{-2}$m. e) $5{,}0 \times 10^{3}$ m.
c) 483,18 cm. f) $2{,}80210 \times 10^{2}$ m.

II-7 - Cena vivida no armazém:

Freguez<u>a</u>: "Me dá trezentas gramas dêsse queijo".
Caxeiro: (corta o queijo, põe na balança): "Tem trezentos e cinquenta gramas. A Sra não se importa?"
Freguez<u>a</u>: "Não faz mal. Pode embrulhar".

Expresse com o número correto de algarismos significativos os trezentas gramas pedidas pela Freguesa.

II-8 - Quando o caxeiro do armazém pesa um quilo de feijão êle mede:

1 kg, 1,0 kg, 1,000 kg ...?

*II-9 - Experiência: Meça a massa e o volume de um objeto qualquer à sua escôlha. (Você terá que descobrir um processo para achar o volume). Expresse a massa específica do objeto com o número correto de algarismos significativos.

II-10 - Escôlha uma parede qualquer, na sua casa ou no Colégio.
Expresse corretamente a área da parede nos três casos seguintez:

a) você quer dar uma calhação na parede, e tem que comprar cal.
b) você quer pintar a parede a óleo, e tem que comprar tinta.

c) você quer ladrilhar a parede, e tem que comprar ladrilhos.

II-11 - Qual é a ordem de grandeza da distância Rio-São Paulo? Da distância Rio-Belo Horizonte? Da distância Rio-Manaus?

II-12 - Qual é a ordem de grandeza do número de habitantes no Rio de Janeiro? Em São Paulo? Em Belo Horizonte? Em Porto-Alegre? No Recife? No Brasil?

II-13 - Qual é a ordem de grandeza do número de segundos em um dia? Em um ano?

II-14 - O ano-luz é uma medida de comprimento frequentemente utilizado em Astronomia. É a distância percorrida pela luz em um ano, supondo que se propague no vácuo. Em um segundo a luz percorre $3{,}00 \times 10^5$ km (no vácuo).
Expresse o ano-luz em metros, com três algarismos significativos.
Qual é a ordem de grandeza do ano-luz, em metros?

II-15 - Qual é a ordem de grandeza do volume da Terra?

II-16 - A massa específica média da Terra é $5{,}5 \times 10^3$ kg/m^3.
Qual é a ordem de grandeza da massa da Terra? (Você precisa do resultado do problema precedente para resolver êste).

II-17 - A massa da atmosfera terrestre é aproximadamente igual a 10^{-6} vêzes a massa da Terra (um milionésimo da massa da Terra). Qual é, em quilogramas, a ordem de grandeza da massa da atmosfera terrestre?

II-18 - A estrêla mais próxima de nós (α-Centauri) dista 4,3 anos-luz do Sistema Solar. Qual é a ordem de grandeza dessa distância em metros?

*II-19 - Se a sala na qual você está sentado agora estivesse cheia de bolas de ping-pong, qual seria a ordem de grandeza do número de bolas?

*II-20 - Qual é a ordem de grandeza do número de árvores na floresta Amazônica.

*II-21 - Qual é a ordem de grandeza do número de fios de cabelo que você tem na cabeça?

*II-22 - Qual é a ordem de grandeza do número de tijolos utilizados na construção de um edifício de 20 andares?

*II-23 - O seu sangue contém aproximadamente 5×10^6 glóbulos vermelhos (hemácias) por mm^3. Qual é a ordem de grandeza do número de total de glóbulos vermelhos que você possui?

*II-24 - Se você viver uns 70 anos, qual será a ordem de grandeza do número de palavras que você terá pronunciado durante a sua vida?

*II-25 - Você lê no "Pequeno Príncipe":... "Os homens ocupam muito pouco lugar sôbre a Terra. Se os dois bilhões de habitantes que povoam a Terra estivessem em pé, juntos uns aos outros como em um comício, êles caberiam folgado numa praça de vinte milhas de comprimento por vinte milhas de largura..."

O que você pensa dessa afirmação de Saint-Exupéry?

*II-26 - Acredita-se que deve existir em média, no Universo, um proton por centímetro cúbico. Acredita-se também que as Galáxias mais distantes de nós devem andar lá pela casa dos dez bilhões de anos-luz... Qual é a ordem de grandeza do número de protons existentes no Universo?

CAPÍTULO III

Gráficos, correlações e Leis Físicas

III-1 O que fazer com nossas medidas?

Muito bem, aprendemos a medir uma grandeza física e a expressar corretamente os resultados numéricos de nossas medidas.

Mas lembre-se, nunca em Física se mede algo sòmente pelo prazer de medir.

Há sempre um objetivo em vista.

E está em tempo de repetir o que eu lhe disse logo no início desta conversa:

"a interpretação das observações efetuadas deve necessàriamente sair do conjunto das medidas .

A interpretação das medidas é o ato mais importante dás atividades do Físico. Pois é essa interpretação que o levará às correlações entre a grandeza medida e os vários parâmetros dos quais depende essa grandeza.

Desde que a interpretação esteja correta, claro...

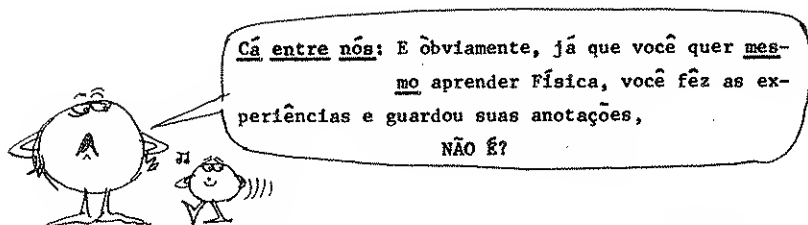
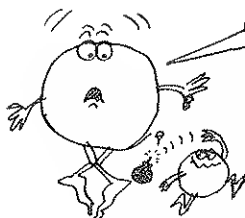
Você se lembra que logo no início, no Capítulo I, eu lhe pedi que medisse o período de um pêndulo cujo comprimento vai variando, e que anotasse o período correspondente a cada comprimento?

Vamos então pôr as cartas na mesa. Aí vai minha tabela de dados:

Tabela III-1

Comprimento do pêndulo (m)	Período (s)
0.20	0.9
0.30	1.1
0.40	1.3
0.50	1.4
0.60	1.6
0.70	1.7
0.80	1.8
0.90	1.9
1.0	2.0

Não há dúvida que o período é uma função do comprimento.

Cá entre nós: A propósito, supondo - o que é provável - que o seu pêndulo seja simplesmente uma pedra amarrada a um barbante, como é que você fêz para medir o comprimento?

Ou talvez deveria perguntar-lhe: o que é que você chama comprimento do pêndulo?

O meu pêndulo é um frasquinho de tinta Nankin amarrado a um barbante.

O problema é: que função do comprimento é essa?

E, antes de mais nada, será que há realmente uma função, isto é, uma correlação universal entre o comprimento do pêndulo e o período?

Em outros têrmos, será que você e eu, você com a sua tabela e eu com a minha, vamos chegar à mesma relação entre comprimento e período?

Cá entre nós: Vale a pena pararmos um instante para que você possa meditar um pouco sôbre o que precede.

Intuitivamente, você acha que a relação - se existir - entre o comprimento e o período de um pêndulo é universal, isto é, constante no tempo e no espaço?

Trata-se sempre do mesmo pêndulo, claro. Com o mesmo barbante e a mesma pedra.

E por favor, esqueça o que você possa ter aprendido a respeito de pêndulos antes da nossa conversa de agora.

Pense simplesmente, com a sua intuição física; mesmo se sua resposta não fôr cem por cento correta, não faz mal.

Mas onde é que estávamos mesmo?

Ah sim! Queremos saber se há uma correlação entre período e comprimento do pêndulo. E se há, qual é.

A existência da correlação é para mim uma quase evidência. Você sabe por quê?

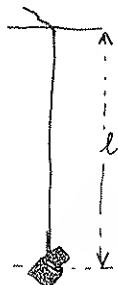
Porque para medir o período eu fiz cada vez dez medidas de dez períodos. E dentro da precisão que eu posso esperar com o processo utilizado, eu encontro cada vez o mesmo valor.

Para que você entenda bem qual foi o meu método de medição, eu mandei fotografar a página do meu caderno de anotações onde eu colhi os dados relativos ao comprimento de 1.0 m.

22-7-68

Período de um pêndulo

Frasco de tinta Nankin amarrado a um barbante.

l

Relógio de pulso com ponteiro de segundos.
Contagem de dez intervalos de dez períodos. O início e o fim do intervalo são avaliados ao segundo mais próximo.

1ª Experiência: $l = 1.0$ m

1ª medida	tempo total = 19 seg	$\to T_1 = 1.9$ seg
2ª "	" = 20 "	$\to T_2 = 2.0$ seg
3ª "	" = 20 "	$\to T_3 = 2.0$ seg
4ª "	" = 20 "	$\to T_4 = 2.0$ seg
5ª "	" = 19 "	$\to T_5 = 1.9$ seg
6ª "	" = 20 "	$\to T_6 = 2.0$ seg
7ª "	" = 21 "	$\to T_7 = 2.1$ seg
8ª "	" = 20 "	$\to T_8 = 2.0$ seg
9ª "	" = 20 "	$\to T_9 = 2.0$ seg
10ª "	" = 19 "	$\to T_{10} = 1.9$ seg

$T_{médio} = 2.0$ seg

Você não acha que essa repetição do valor 2.0 seg é mais que uma coincidência?

E que realmente deve existir uma dependência funcional entre o período do pêndulo e o comprimento?

Pois bem, mas ainda falta descobrir qual é essa correlação.

Voltemos às nossas tabelas, você e eu. Eu volto à Tabela III-1, e você volta à sua.

Qualitativamente, eu percebo logo que o período aumenta com o comprimento. Mais comprido o pêndulo, maior o período. Mas isto, já sabíamos desde a primeira vez que subimos num balanço.

Além dessa contatação, pouco ou nada posso dizer. Ou melhor, sim. Não há proporcionalidade entre o período e o comprimento. Quando o comprimento dobra, de 0.50 m a 1.0 m por exemplo, o período passa de 1.4 seg para 2.0 seg (e não para 2.8 seg)

E isto é lastimável. A relação de proporcionalidade é tão bonita...

Evidentemente porque é a mais simples de tôdas, e a mais fácil de achar.

E por isso mesmo, fique sempre de ôlho...

BUM!

Cá entre nós: Você seria capaz de citar um fenômeno natural em que uma grandeza varia proporcionalmente a outra?

Infelizmente, o período do pêndulo não é proporcional ao comprimento. Não se pode ter tudo na vida.

Em casos semelhantes a êste, o Físico lança os dados em um gráfico. Isto permite ver muito mais fàcilmente o que acontece. E em todos os casos é mais lucrativo do que ficar olhando para uma coleção de números, mesmo quando êsses números estão arrumados sob forma de tabela.

Temos pois que aprender a construir gráficos.

Comecemos porém por algo muito simples, e que é indispensável na

construção do gráfico: aprendamos a construir uma escala de correspondência entre um comprimento e uma grandeza física qualquer.

III-2 A escala linear.

Comece por traçar uma reta numa fôlha de papel. Como eu fiz na Fig. III-1.

unidade de comprimento: 1 cm

B A comprimentos (cm)

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

-30 -20 -10 0 10 20 30 40 50 60 70

velocidades (cm/seg)

Escala de Correspondência v = kx

k = 10/seg

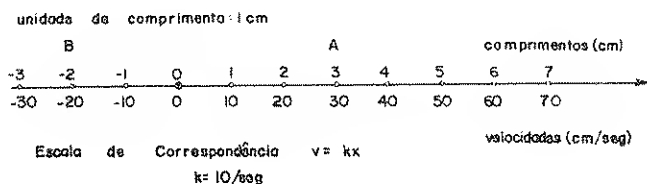



Figura III-1

Escôlha um sentido arbitrário que você chamará sentido positivo. Você assinala êsse sentido por uma seta. Você tem agora um eixo orientado.

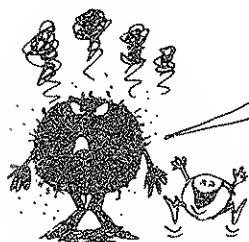
Noventa e nove por cento (pelo menos) dos eixos "horizontais" que você encontra nos livros de Matemática e Física são orientados positivamente para a direita. Mas não há nenhuma razão para isto, a não ser o hábito – eu ia dizer o vício – .

Gradue agora o seu eixo com uma unidade de comprimento que também pode ser arbitrária, mas que vamos escolher seja ela o centímetro, ou um múltiplo inteiro do centímetro, para não nos complicar inùtilmente a existência.

Escôlha uma dessas graduações como "graduação zero". Será a origem O do seu eixo.

Um ponto qualquer do eixo pode agora ser representado por um número algébrico. Olhe por exemplo o ponto A. Êle dista 3cm da origem O e para ir de O até A eu me desloco no sentido positivo (o sentido da seta). Eu digo que a

abscissa do ponto A é +3cm.

Da mesma forma, a abscissa do ponto B é -2cm.

Cá entre nós: Eu estou certo que você já entendeu a regra do jôgo. Nada mais simples.

Qual é a abscissa da origem O?

Qual é o ponto cuja abscissa é +4.5cm?

-2.7 cm?

Muito bem. Mas não é para localizar pontos pelas suas abscissas que construímos nosso eixo.

Eu quero ir um passo além.

Eu quero associar aos pontos do eixo a medida de uma grandeza física qualquer, e não necessàriamente de um comprimento.

Eu quero por exemplo associar aos pontos do meu eixo a medida de uma velocidade.

Mas isto é absurdo! Pelo menos à primeira vista...

Pois a única coisa que eu posso medir diretamente, ao longo de um eixo, são comprimentos. A única grandeza associada diretamente a uma reta é a grandeza espaço.

A não ser que eu disponha de um intérprete.

E que êsse intérprete traduza espaços em têrmos de velocidades.

Raciocine: você mede centímetros, e quer transformar êsses centímetros em centímetros por segundo. O que é que você deve fazer?

Òbviamente, você deve multiplicar os centímetros lidos no eixo por algo que é o inverso de um tempo. Você escreve então

$$v = kx \qquad \text{(III-1)}$$

e você define dessa maneira uma escala linear de correspondência entre espa-

ços por um lado, e velocidades por outro (*).

Voltemos à Fig. III-1: na linha acima do eixo estão marcadas as abscissas inteiras dos pontos do eixo: -3 -2 -1 0 1 2 3 ... em centímetros. Na linha abaixo, a cada um dos pontos precedente faz-se corresponder uma velocidade: -30, -20, -10, 0 10 20 30 ... em centímetros por segundo. A escala é

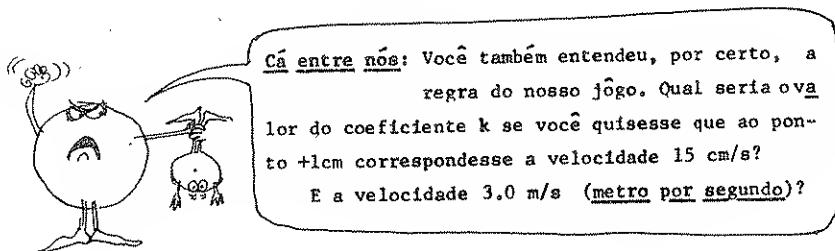
$$v = 10\ x \qquad \text{(III-2)}$$

do momento que eu quero que ao ponto x = 1cm corresponda a medida 10 cm/seg. Nêsse caso o coeficiente k é igual a 10 por segundo. Você leu bem? 10 por segundo, ou se quiser 10/s. O coeficiente k se mede em unidades de 1/s: é realmente o inverso de um tempo.

Reescrevamos a escala (III-2) identificando as unidades:

$$v\ \frac{cm}{s} = 10\left(\frac{1}{s}\right)\ x\ (cm) = 10\ x\ \frac{cm}{s}$$

E todo o mundo está satisfeito.

Cá entre nós: Você também entendeu, por certo, a regra do nosso jôgo. Qual seria o valor do coeficiente k se você quisesse que ao ponto +1cm correspondesse a velocidade 15 cm/s?
E a velocidade 3.0 m/s (metro por segundo)?

Assim é que aprendemos a construir escalas lineares.

Mas isto não é um fim em si.

Precisávamos entender o que é uma escala para podermos construir gráficos.

(*) A escala é linear porque v é do primeiro grau em x. Mais precisamente, v é proporcional a x. Utiliza-se também em Física uma outra escala: a escala logarítmica. Mas vamos deixá-la para um Curso mais avançado.

III-3 Gráficos.

III-3-1 Sistemas de coordenadas.

Construa dois eixos perpendiculares entre si, como na Fig. III-2. Oriente ambos.

Você tem agora o que os matemáticos chamam de Sistema de coordenadas cartesiano.

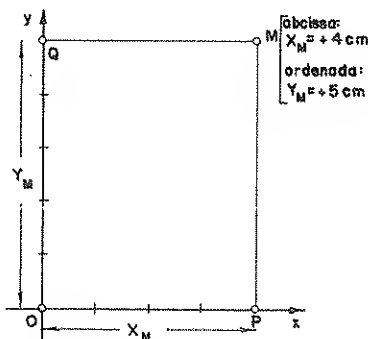
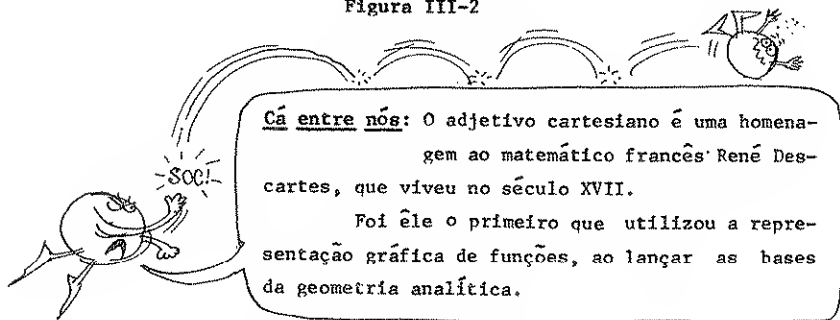



Figura III-2

Tomemos como origem comum sôbre os dois eixos o ponto de encontro O.
O eixo "horizontal" (Ox na Figura) é chamado eixo das abscissas.
O eixo "vertical" Oy é chamado eixo das ordenadas.

Essa palavra nova, "ordenada", designa sôbre o eixo Oy a mesma coisa que "abscissa" sôbre o eixo Ox. É sempre a distância orientada da origem até um ponto qualquer do eixo.

Considere agora um ponto qualquer M do plano da fôlha, e projete M sôbre os eixos, em P sôbre o eixo Ox, em Q sôbre o eixo Oy.

A medida algébrica da distância OP é a abscissa do ponto M.

A medida algébrica da distância OO é a ordenada do ponto M.

O conjunto {abscissa-ordenada} constitui as coordenadas de M.

As coordenadas do ponto M da Figura são:

abscissa x_M = +4cm ordenada y_M = +5cm

De modo que a cada ponto do plano sabemos associar agora um par de números algébricos, *na ordem abscissa-ordenada*.

E você agora vai perdoar-me de insistir um pouco mais sôbre êsse assunto. Eu reconheço que talvez não seja de entusiasmar ninguém.

Mas eu preciso estar certo que você sabe manejar bem o que acabamos de aprender.

Então vá até a Fig. III-3 e determine as coordenadas de *todos* os pontos marcados.

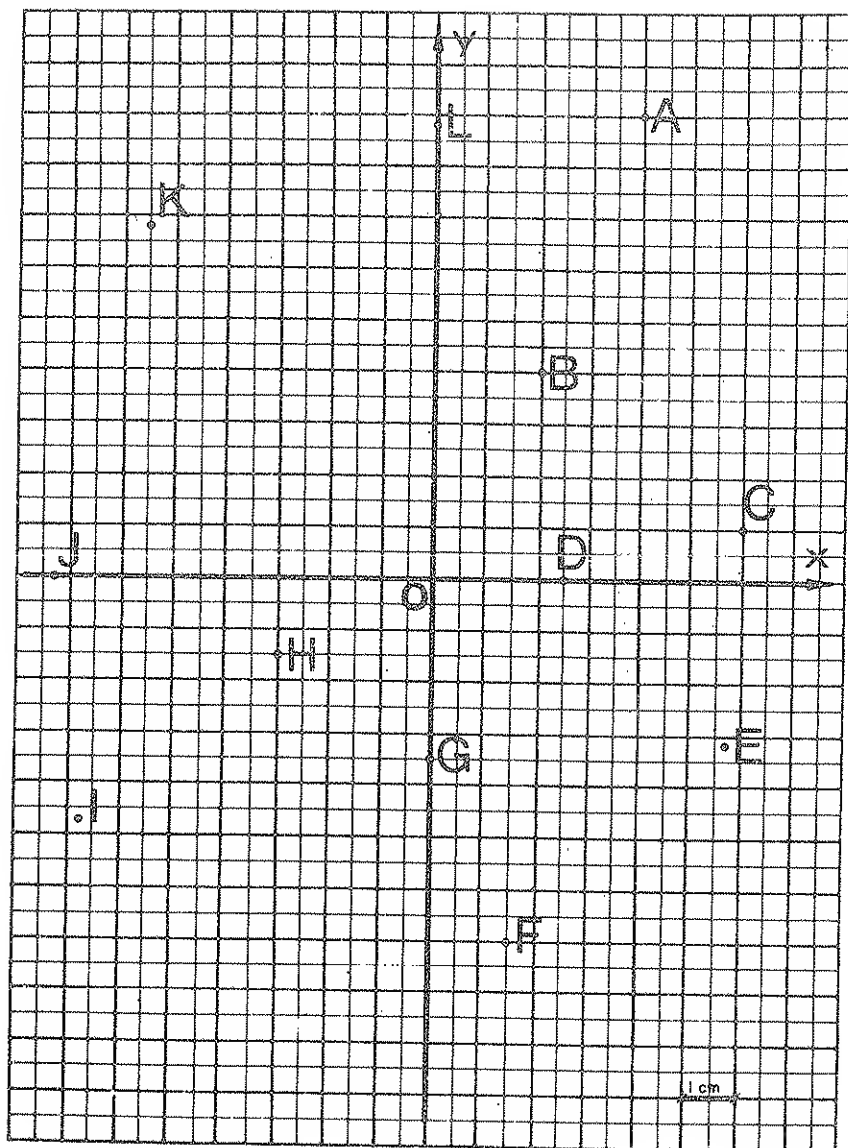



Figura III-3

Mas você também pode jogar o jôgo em sentido contrário.

Você pode dar-se um par de medidas tal que {-3,5cm + 2,0cm} e fazer corresponder a êsse par um ponto do plano da Fig. III-3. A regra é: o primeiro número do par é a abacissa do ponto procurado. O segundo número é a ordenada.

Então, já achou o ponto "imagem" do par precedente?

E do par {+ 2,7cm - 4,1 cm}?

E do par {- 4,0cm - 2,8 cm}?

Estamos agora prontoa para prosseguir.

III-3-2 Representação de um par de medidas de grandezas físicas quaisquer.

Voltemos por um momento ao nosso pêndulo, e à tabela III-1.

Essa tabela é formada por nove pares de medidas: uma medida de comprimento e uma medida de tempo em cada par.

Eu tenho por exemplo o par {0,20m 0,9seg}, o par {0,30m 1,1seg}...

Será que eu poderia representar gráf' amente cada um dêsses pares por aua "imagem", isto é por um ponto sôbre um plano munido de eixo cartesiano?

Eu posso sim, desde que eu asaocie a cada eixo uma escala conveniente, que possa traduzir abaciasas e ordenadaa medidas em centímetros (por exemplo) em comprimentos medidos em metros e em tempoa medidos em segundos.

Você agora entende porque tivemos que aprender o que era uma escala de correspondência?

Muito bem, aí vamos nóa.

Como eu quero estudar o período do pêndulo em função do comprimento, eu vou lançar o comprimento (a variável) em abscissas, e o período (a função) em ordenadas.

A ·scala orizontal deve ser da forma $\ell = k_1 x$. ℓ é o comprimento do pêndulo, em metro; x é a abscissa em centímetros.

Eu vou tentar a correspondência 1cm → 0.10m. O fator k_1 será determinado pela relação

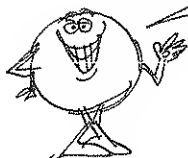
$$0{,}10m = k_1 \times 1cm \rightarrow k_1 = \frac{0{,}10m}{1cm} = 0.10 \frac{m}{cm}$$

E a escala horizontal é

$$\ell = 0{,}10\ x \quad (\underline{\ell} \text{ em metro, } \underline{x} \text{ em centímetro}).$$

Passemos agora para a escala vertical.

Como estamos estudando juntos, você e eu, eu vou deixá-lo descobrir sòzinho a correspondência entre o período T e a ordenada y.

Marquemos encontro daquí a cinco minutos.

Cá entre nós: Por favôr não me venha com a desculpa que você não sabe achar essa escala.

Você sabe sim.

Ou você quer aproveitar dêsses cinco minutos para bater papo com o Martins?

Bem, como eu quero transformar ordenadas y em períodos T a escala vertical deve ser da forma:

$$T = k_2\ y$$

Eu estou muito tentado de fazer a transformação "um por um" isto é, de associar um segundo a cada centímetro de ordenada.

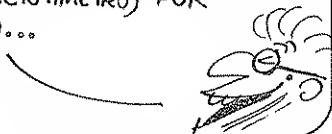
Convenhamos que é muito mais simples.

Pois então o fator k_2 passa a valer 1 $\frac{s}{cm}$ e a escala se escreve:

$$T = y \quad (T \text{ em segundo, } y \text{ em centímetro})$$

E foi exatamente nêste ponto que o Martins manifestou-se de novo.

Também fazia muito tempo...

MARTINS E EU 04

..Nessa altura um sorriso beato flutuava nos lábios coletivos da turma.

Então eu fui ao quadro negro e eu mostrei ao Martins, e aos outros, o que eu queria dizer mesmo.

E você que me lê, se você teve o mesmo reflexo que o Martins, meus parabéns.

E desculpe por não ter explicado melhor antes.

Mas onde é mesmo que estávamos?

Ah sim! Estávamos na nossa escala vertical, que transforma centímetros de ordenadas em segundos de períodos.

Eu escrevo de novo T = y (T em segundo, y em centímetro).

E com minhas duas escalas, a horizontal e a vertical, eu vou transformar os pares da Tabela III-1 {metro, segundo} em pares {cm cm} cujas imagens poderão ser lançadas no plano definido pelos eixos coordenados Ox e Oy.

(T = y)

ℓ(m)	T(s)	(ℓ = 0.10 x)	x(cm)	y(cm)
{0.20	0.9}		{2	0.9}
{0.30	1.1}		{3	1.1}
{0.40	1.3}		{4	1.3}
{0.50	1.4}		{5	1.4}
{0.60	1.6}		{6	1.6}
{0.70	1.7}		{7	1.7}
{0.80	1.8}		{8	1.8}
{0.90	1.9}		{9	1.9}
{1.0	2.0}		{10	2.0}

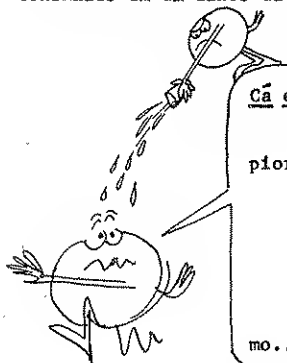
E ao lançar as imagens doa pares {x y} eu obtive o seguinte:

periodo do pêndulo (seg)
4·0
3·0
2·0
1·0
comprimento do pêndulo (metro)
0
0·10
0·20
0·30
0·40
0·50
0·60
0·70
0·80
0·90
1·0

Figura III-4

Você percebe qual foi o êrro que eu cometi?

Eu cometi um êrro de planejamento.

Dispondo de uma fôlha inteira eu escolhi tão mal minhas escalas que o conjunto dos pontos que representam os pares (comprimento - período) ficou confinado em um canto da página.

Cá entre nós: Depois da aula, o Martins veio dizer-me que podia ter ficado muito pior.

Era só escolher como escala horizontal

$$\ell = x \quad (\ell \text{ em m, } x \text{ em cm})$$

Eu não disse que o Martins era amigo mesmo...

Para lançar corretamente em gráfico dados numéricos, você deve escolher suas escalas de tal maneira que a faixa dos dados correspondente a um dos eixos utilize a maior parte do eixo, porém não todo êle.

E a razão é que você talvez será levado a fazer novas experiências que ampliarão a faixa de dados que você já possui.

Mas é melhor explicar tudo isto com o nosso exemplo do pêndulo. Vá à Fig. III-5, onde eu lancei de novo as imagens dos pares (comprimento-período) porém de maneira correta desta vez.

Eu escolhi como escala horizontal:

$$\ell = 0{,}05\ x \quad (\ell \text{ em m, } x \text{ em cm})$$

Essa escala me permite utilizar 2/3 do eixo correspondente, já que a faixa de dados da Tabela III-1 cobre de 0,20 até 1,0 m.

De modo que se mais tarde eu quiser medir o período de um pêndulo com 1.5 m de comprimento, ainda terei lugar no meu gráfico para a nova experiência.

Para a escala vertical eu escolhi

$$T = 0{,}2\ y \quad (T \text{ em s, } y \text{ em cm})$$

Os períodos da Tabela III-1 vão de 0.9 até 2.0s. A escala escolhida utiliza pois a metade do espaço disponível em ordenadas.

Poderia evidentemente ampliar um pouco mais esta escala. Mas então os décimo de segundo não coincidiriam mais com as divisões centimétricas.

E isto complicaria a construção dos pontos do gráfico.

É preferível evitar isto, se você não está limitado pelo espaço disponível.

Por exemplo, a escsla

$$T = \frac{2}{15}\ x \qquad (T \text{ em s, } x \text{ em cm})$$

permitiria utilizar 3/4 dos 20 cm disponíveis em ordenadas.

Mas a divisão 0.9s dos 20cm disponíveis em ordenadas.

E a divisão 1,1s com 8,25cm...

Período de um pêndulo em função do comprimento
Escalas: l(m) = 0.05 x (cm)
T(seg) = 0.2 y (cm)
T(seg)
l(m)
0·10
0·20
0·30
0·40
0·50
0·60
0·70
0·80
0·90
1·0
0
0·2
0·4
0·6
0·8
1·0
1·2
1·4
1·6
1·8
2·0

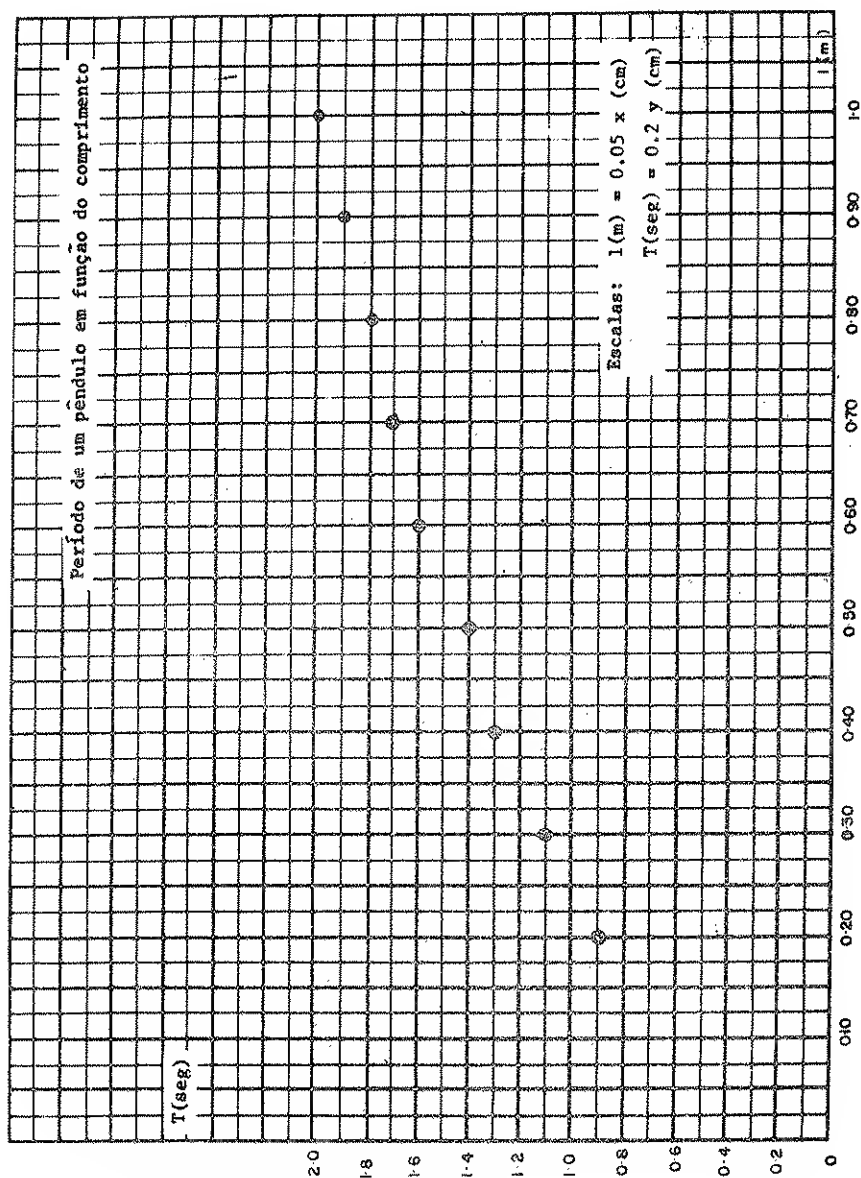



Figura III-5

III-3-3 O que fazer com os pontos obtidos?

E agora que construímos os pontos correspondentes aos pares de dados experimentais, o que vamos fazer com êles?

Vamos procurar fazer passar por êles uma curva contínua. Essa curva não passará necessàriamente por todos os pontos, o que aliás é perfeitamente compreensível.

Pois afinal das contas tôdas as nossas medidas experimentais vêm dentro de uma certa faixa de êrros.

Por exemplo eu tinha encontrado 1.6 seg para o período do pêndulo com 0.60 cm de comprimento.

Mas eu acabo de repetir a experiência com o mesmo pêndulo e o mesmo relógio, e agora a média das dez medidas foi 1,5 seg.

Tudo de acôrdo com o que aprendemos no Capítulo II.

Então por quê fazer passar a curva do meu gráfico pelo ponto

{0.60 m 1,6 seg}?

Ou pelo ponto {0,60 m 1.5 seg} aliás?

De modo que eu procuro traçar uma curva que se aproxima o mais possível de todos os pontos obtidos.

E que varie suavemente, sem pontos angulosos, sem "sobresaltos".

Não faça nunca um êrro muito comum com o principiante: não una os pontos por segmentos de retas, como mostra a Figura III-6. (a não ser evidentemente que todos êles estejam em linha reta... o que é raro na prática).

Pois assim fazendo, você estaria afirmando que entre dois pontos consecutivos do gráfico a grandeza que você estuda varia linearmente.

Figura III-6

Não que as variações lineares sejam proibidas, graças a Deus!

Mas aprenderemos na seção seguinte a maneira correta de descobrí-las (*).

A Fig. III-7 representa a curva que eu construí com os pontos obtidos nas experiências com o pêndulo.

(*) Essas recomendações se aplicam evidentemente às grandezas que variam contìnuamente, como sempre acontecerá nêsse Curso. O comprimento de um pêndulo varia contìnuamente com o comprimento. A êsse propósito veja o Probl. III-7.

Figura III-7

III-4 <u>O que contam os gráficos</u>.

III-4-1 III-4-1 <u>Linearidade e taxa de variação</u>.

Suponha que os pontos correspondentes à determinada experiência sejam como na Fig. III-8-a.

Assim que você estiver acostumado a construir gráficos em Física,

Pois assim fazendo, você estaria afirmando que entre dois pontos consecutivos do gráfico a grandeza que você estuda varia linearmente.

Figura III-6

Não que as variações lineares sejam proibidas, graças a Deus!

Mas aprenderemos na seção seguinte a maneira correta de descobrí-las (*).

A Fig. III-7 representa a curva que eu construí com os pontos obtidos nas experiências com o pêndulo.

(*) Essas recomendações se aplicam evidentemente às grandezas que variam contìnuamente, como sempre acontecerá nêsse Curso. O comprimento de um pêndulo varia contìnuamente com o comprimento. A êsse propósito veja o Probl. III-7.

Figura III-7

III-4 O que contam os gráficos.

III-4-1 III-4-1 Linearidade e taxa de variação.

Suponha que os pontos correspondentes à determinada experiência sejam como na Fig. III-8-a.

Assim que você estiver acostumado a construir gráficos em Física,

ao olhar para êsses pontos você me dirá: "em primeira aproximação o gráfico é uma reta".

E você construirá essa reta mais ou menos como na Fig. III-8-b.

Em primeira aproximação, claro.

Pois eu poderia dizer-lhe: "a precisão das minhas medidas é tão grande que eu garanto pràticamente, na escala da figura, que a curva deve passar pelos pontos marcados".

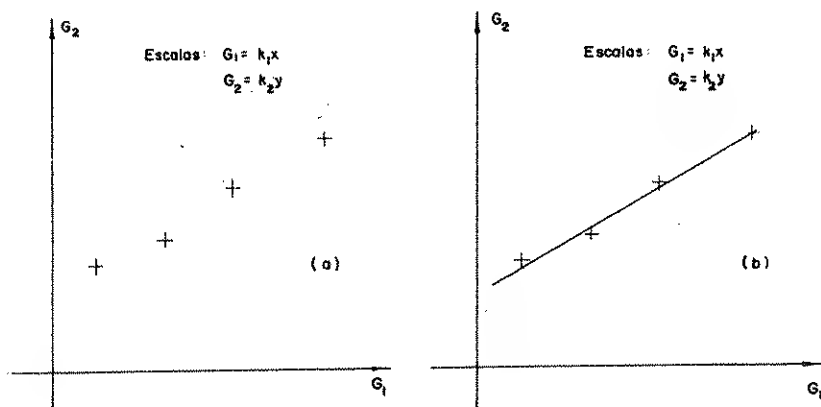
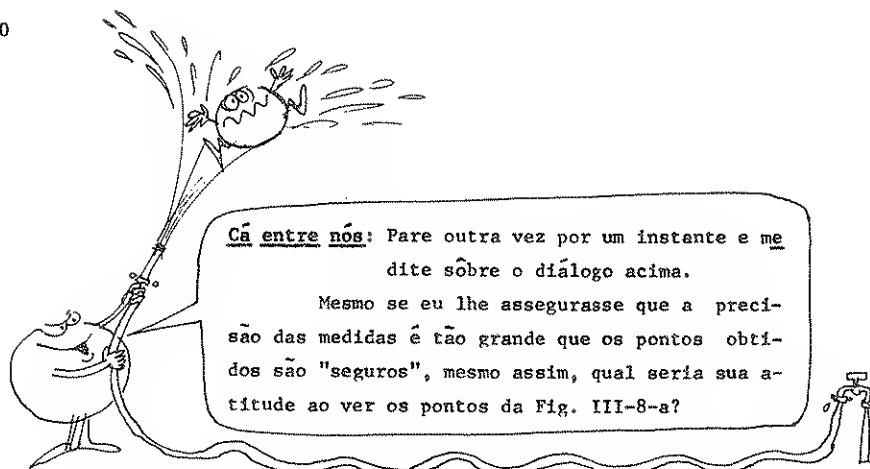



Figura III-8

Eu espero que você me responda: "depende do que o Sr. quer fazer com o gráfico, evidentemente. Mas mesmo assim, <u>em primeira aproximação</u> o seu gráfico é uma reta".

Quando o gráfico é uma reta diz-se que a grandeza representada na escala vertical (em ordenadas) varia <u>linearmente</u> com a grandeza representada na escala horizontal (em abscissas).

Se eu aceito o gráfico da Fig. III-8-b, eu digo que na aproximação do gráfico a grandeza G_2 é uma função <u>linear</u> de grandeza G_1.

O que se traduz matemàticamente pela relação

$$\boxed{G_2 = a\,G_1 + b} \qquad \text{(III-3)}$$

em que <u>a</u> e <u>b</u> são duas constantes.

A relação (III-3) é do primeiro grau em G_1 e G_2. E a representação gráfica de uma função do primeiro grau é uma reta. Daí o qualificativo "linear".

Estamos tocando agora ao ponto mais importante dêste Capítulo:

> **Se eu puder associar uma relação matemática a um gráfico, eu tenho a expressão da correlação que deve existir entre as duas grande**

zas associadas no gráfico. E se o fenômeno estudado fôr um fenômeno natural, eu tenho a expressão de uma lei física.

Supondo então que o gráfico seja linear, eu terei que achar o valor das constantes a e b para que a expressão (III-3) me forneça a expressão da correlação existente entre as grandezas G_1 e G_2.

Tomemos um exemplo concreto. É sempre mais fácil para entender. No decorrer de uma viagem de automóvel do Rio a Teresópolis, eu anotei a distância s percorrida desde a saída do Rio, em quilômetros, em função do tempo t em horas. A origem dos tempos coincide com o instante da partida.

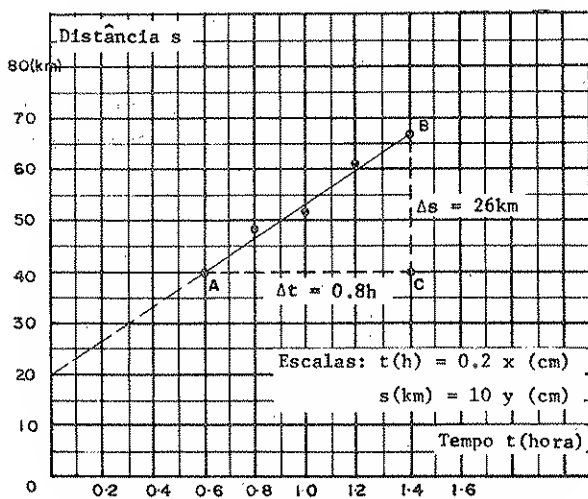



Figura III-9

Em $t = 0.6$ horas (ou seja $0.6 \times 60 = 36$ minutos depois da partida) eu me encontrava a 40 km do Rio. Entre $t_1 = 0.6$ h e $t_2 = 1.4$ h o tráfego foi pesadíssimo, e a tabela foi a seguinte:

tempo <u>t</u> (hora)	distância <u>s</u> (quilômetro)
0.6	40
0.8	48.5
1.0	52
1,2	61
1.4	66

Os pontos estão lançados na Fig. III-9, com as escalas

$$t = 0.2\ x \quad (t \text{ em hora, } x \text{ em cm})$$
$$s = 10\ \ y \quad (s \text{ em km, } y \text{ em cm})$$

Em primeira aproximação o gráfigo é um segmento de reta.

De modo que, entre 0.6 hora e 1.4 hora, a distância <u>s</u> é uma função do primeiro grau do tempo, da forma

$$s = at + b \qquad \text{(III-4)}$$

Qual é o sentido físico das constantes <u>a</u> e <u>b</u>?

Para <u>b</u>, <u>e se eu olhasse sòmente para a relação (III-4)</u>, eu seria tentado de dizer: <u>b</u> é o valor de <u>s</u> quando $t = 0$.

E você me diria imediatamente: "mas quando <u>t</u> era igual a zero o Sr. estava partindo do Rio, e o seu <u>s</u> era também zero".

O que é absolutamente certo.

É que, desde que minhas medidas foram feitas sòmente entre 0.6 e 1.4 horas, <u>a relação (III-4) é válida sòmente dentro dêsse intervalo de tempo</u>.

No entanto, a <u>equação da reta</u> da Fig. III-9, em Geometria analítica, independe òbviamente do segmento que eu utilizo para definir a reta. Se essa reta fôsse traçada, ela encontraria o eixo vertical em um ponto cuja or-

denada é +2cm, o que corresponde, com a escala utilizada, a 20 km.

A constante b da equação (III-4) é igual a 20 km.

Passemos agora à constante a.

Considere dois instantes quaisquer t_1 e t_2, e para tornar as coisas mais claras, refira-se à Fig. III-10 que esquematiza a reta da Fig.III-9.

Em t_1 a distância percorrida era s_1.

Em t_2 a distância percorrida era s_2.

Entre êsses dois instantes a distância percorrida variou. Variou de quanto? Do seu valor final menos o seu valor inicial.

Figura III-10

Isto é, de $s_2 - s_1$. Vamos representar essa variação pelo símbolo Δs. Eu defino (veja as três barras da relação seguinte):

$$\Delta s \equiv s_2 - s_1$$

Da mesma forma, eu defino o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ por:

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1$$

Mas a equação (III-4) nos diz que qualquer que seja t (dentro dos limites das minhas anotações claro), temos

$$s = at + b$$

Então

$$s_2 = at_2 + b \qquad \text{(III-5)}$$

e

$$s_1 = at_1 + b \qquad \text{(III-6)}$$

Subtraindo (III-6) de (III-5):

$$s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$$

o que se escreve

$$\Delta s = a \ \Delta t$$

de modo que

$$\boxed{a = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad \text{(III-7)}$$

A constante a representa a razão entre a variação da distância percorrida desde o ponto de partida, durante um certo intervalo de tempo, e êsse mesmo intervalo de tempo.

Você não está achando isto muito claro, não é?

Então volte à Fig. III-9.

A equação (III-7) mostra que o cálculo da constante a pode se fazer a partir de dois instantes quaisquer t_1 e t_2.

Tome $t_1 = 0{,}6$ h $\quad t_2 = 1{,}4$ h $\rightarrow \Delta t = 1{,}4 - 0{,}6 = 0{,}8$ h.

Você vê pelo gráfico que os valores correspondentes de s são

$$s_1 = 40 \text{ km} \qquad s_2 = 66 \text{ km} \rightarrow \Delta s = 66 - 40 = 26 \text{ km}.$$

O valor de a é:

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{26 \text{ km}}{0{,}8 \text{ h}} \qquad \text{(III-8)}$$

denada é +2cm, o que corresponde, com a escala utilizada, a 20 km.

A constante b da equação (III-4) é igual a 20 km.

Passemos agora à constante a.

Considere dois instantes quaisquer t_1 e t_2, e para tornar as coisas mais claras, refira-se à Fig. III-10 que esquematiza a reta da Fig. III-9.

Em t_1 a distância percorrida era s_1.

Em t_2 a distância percorrida era s_2.

Entre êsses dois instantes a distância percorrida variou. Variou de quanto? Do seu valor final menos o seu valor inicial.

Figura III-10

Isto é, de $s_2 - s_1$. Vamos representar essa variação pelo símbolo Δs. Eu defino (veja as três barras da relação seguinte):

$$\Delta s \equiv s_2 - s_1$$

Da mesma forma, eu defino o intervalo de tempo $t_2 - t_1$ por:

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1$$

Mas a equação (III-4) nos diz que qualquer que seja $\underline{t}$ (dentro dos limites das minhas anotações claro), temos

$$s = at + b$$

Então

$$s_2 = at_2 + b \qquad \text{(III-5)}$$

e

$$s_1 = at_1 + b \qquad \text{(III-6)}$$

Subtraindo (III-6) de (III-5):

$$s_2 - s_1 = a(t_2 - t_1)$$

o que se escreve

$$\Delta s = a \ \Delta t$$

de modo que

$$\boxed{a = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad \text{(III-7)}$$

A constante $\underline{a}$ representa a razão entre a variação da distância percorrida desde o ponto de partida, durante um certo intervalo de tempo, e êsse mesmo intervalo de tempo.

Você não está achando isto muito claro, não é?

Então volte à Fig. III-9.

A equação (III-7) mostra que o cálculo da constante $\underline{a}$ pode se fazer a partir de dois instantes <u>quaisquer</u> t_1 e t_2.

Tome $t_1 = 0{,}6$ h $\quad t_2 = 1{,}4$ h $\rightarrow \Delta t = 1{,}4 - 0{,}6 = 0{,}8$ h.

Você vê pelo gráfico que os valores correspondentes de $\underline{s}$ são

$$s_1 = 40 \text{ km} \qquad s_2 = 66 \text{ km} \rightarrow \Delta s = 66 - 40 = 26 \text{ km}.$$

O valor de $\underline{a}$ é:

$$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{26 \text{ km}}{0.8 \text{ h}} \qquad \text{(III-8)}$$

A distância do meu carro até o Rio variou (aumentou no caso) de 26km em 0,8 h (ou seja 48 minutos).

Você entende agora o que é fìsicamente a constante <u>a</u>?

É a <u>taxa de variação</u> da distância percorrida em função do tempo. É uma velocidade. Eis porque ao completar a conta da equação (III-8) eu escrevo finalmente a = 32 km/h.

De um modo geral, na equação (III-3): $G_2 = aG_1 + b$ a constante <u>a</u> representa a taxa de variação da grandeza G_2 em função da grandeza (ou do parâmetro) G_1.

III-4-2 <u>Relação entre taxa de variação e coeficiente angular.</u>

No seu curso de Matemática você aprendeu que a equação da reta (D) da Fig. III-11, em coordenadas cartesianas, é

$$y = ax + b \qquad \text{(III-9)}$$

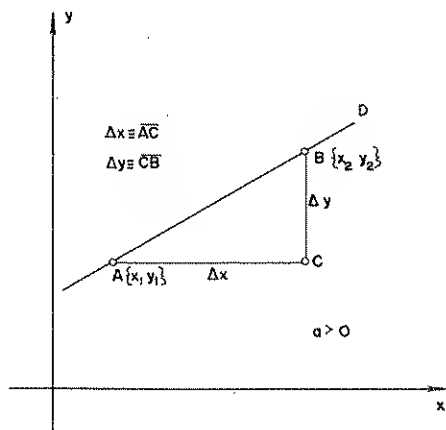



Figura III-11

A constante a é chamada em Matemática "coeficiente angular" da reta. Para achar a, você constroi, um triângulo retângulo tal que ABC com a hipotenusa M ao longo da reta e os catetos AC e BC paralelos respectivamente ao eixo 0x e ao eixo 0y. Você mede $\overline{AC} \equiv \Delta x$ e $\overline{CB} \equiv \Delta y$ ($\overline{AC}$ representa como você sabe a medida algébrica do segmento orientado AC). Então

$$a \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \qquad \text{(III-10)}$$

Se a reta fôr como na Fig. III-11, Δx e Δy têm mesmo sinal, e a é positivo.

Se a reta fôr como na Fig. III-12, Δx e Δy têm sinais contrários, de modo que a é negativo.

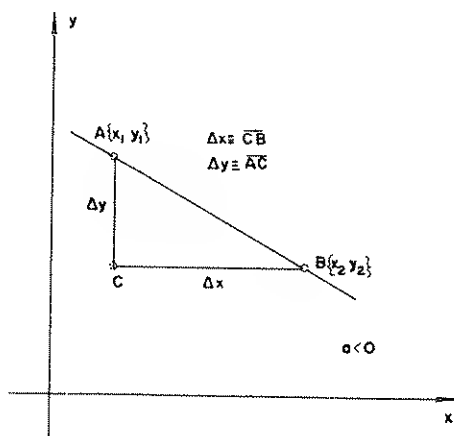



Figura III-12

Muito bem, se você comparar as equações (III-3) e (III-9):

$$G_2 = aG_1 + b \qquad \text{(III-3)}$$

$$y = ax + b \qquad \text{(III-9)}$$

você estará tentado de dizer que a constante a da equação (III-3) é o coeficiente angular da reta associada a essa equação, na figura III-8-a.

Mas não é não, no caso geral.

Basta que você observe que um coeficiente angular como o a da relação (III-10) é sempre um número puro: "quantas vêzes $\overline{AC}$ está contido em $\overline{CB}$?", pergunta (III-10). Como $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são duas grandezas comparáveis, (dois comprimentos), a resposta é um número: 0,5 aproximadamente, no caso da Fig. III-11.

Mas volte à Fig. III-9.

O coeficiente angular da reta AB é

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{+ 2,6 \text{ cm}}{+ 4,0 \text{ cm}} = 0,65.$$

E a taxa de variação da distância percorrida em função do tempo é 32 km/h.

Qual é então a relação entre taxa de variação e coeficiente angular?

É muito simples. Veja as escalas utilizadas no gráfico da Figura III-9:

$$t = 0,2\ x \qquad (t \text{ em h, } x \text{ em cm})$$

$$s = 10\ y \qquad (s \text{ em km, } y \text{ em cm})$$

Elas fornecem imediatamente, para dois instantes t_1 e t_2 quaisquer:

$$t_2 - t_1 \equiv \Delta t = 0,2(x_2 - x_1) \equiv 0,2\ \Delta x \qquad \text{(III-11)}$$

$$s_2 - s_1 \equiv \Delta s = 10\ (y_2 - y_1) \equiv 10\ \ \Delta y \qquad \text{(III-12)}$$

e por divisão de (III-12) por (III-11):

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{0,2}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A taxa de variação é igual ao coeficiente angular da reta multiplicado pela razão entre os fatores k_2 e k_1 das escalas utilizadas respectivamen

te em ordenadas e em abscissas.

Ponhamos números na equação (III-13).

Cá entre nós: E para tanto você vai me dizer primeiro quais são as unidades do 10 e do 0,2 dessas escalas.

Nessa altura você deve ter terminado o seu cálculo:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 \text{ km/cm}}{0,2 \text{ h/cm}} \times 0,65 = 32,5 \text{ km/h}$$

ou seja, com dois algarismos significativos, 32 km/h.

Generalizemos logo o resultado acima. A constante a da equação (III-3) é:

$$a = \frac{k_2}{k_1} \text{ (coeficiente angular da reta)} \qquad \text{(III-14)}$$

III-4-3 Gráficos não lineares - Taxa de variação média.

A Fig. III-13 representa um gráfico não linear.

A grandeza G_2 não é uma função do primeiro grau de G_2.

Mas escolhemos dois pontos quaisquer A e B do gráfico.

Em A as grandezas G_1 e G_2 valem $(G_1)_A$ e $(G_2)_A$ respectivamente.

Em B elas valem $(G_1)_B$ e $(G_2)_B$.

E, com $\Delta G_1 \equiv (G_1)_B - (G_1)_A$

$\Delta G_2 \equiv (G_2)_B - (G_2)_A$

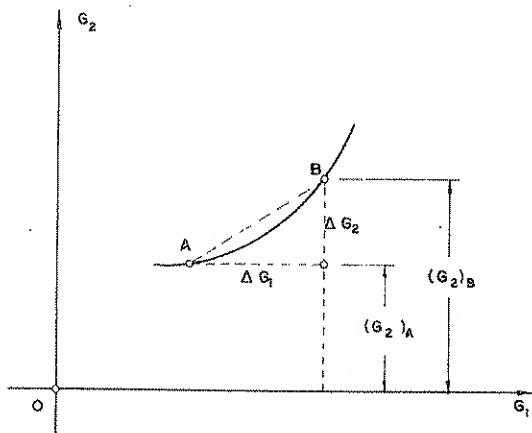



Figura III-13

definimos:

taxa média de variação de G_2 em função de G_1, no intervalo (A,B) $\equiv \frac{\Delta G_2}{\Delta G_1}$

A Fig. III-14 representa um outro gráfico distância-tempo, não linear desta vez.

No intervalo (0,7 h, 1,3 h) a distância percorrida aumentou de:

$\Delta s \equiv s_B - s_A = 73 - 27 = 46$ km

Sendo $\Delta t = 0{,}6$ h, a taxa média de variação da distância percorrida (diremos "velocidade média" no próximo Capítulo) no intervalo considerado foi de:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{46 \text{ km}}{0{,}6 \text{ h}} = 77 \text{ km/h}.$$

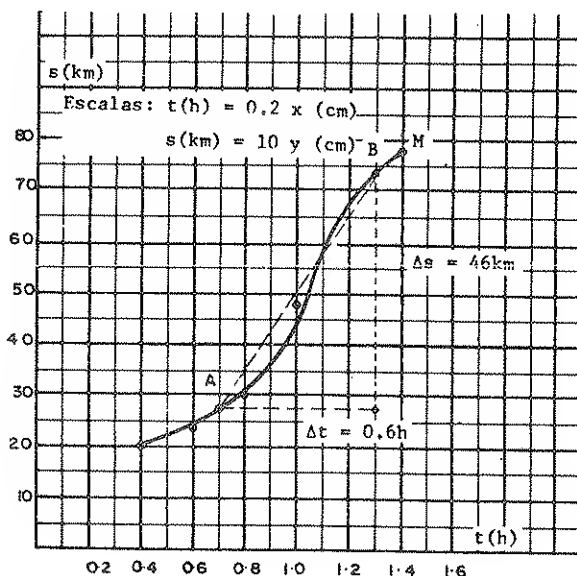



Figura III-14

Interprete fisicamente: <u>em média</u>, no intervalo (0,7 h, 1,3 h) eu andei a 77 km/h.

A taxa média de variação é proporcional ao coeficiente angular da <u>corda</u> AB do gráfico.

Qual é o fator de proporcionalidade?

III-4-4 Taxa de variação local ou instantânea.

Sempre com os dados da Fig. III-14, calculemos a taxa de variação média da distância percorrida em função do tempo, nos intervalos seguintes:

Cá entre nós: Observe que todos os intervalos começam em 0,70 h.

E confira todos os cálculos, você mesmo, sôbre o gráfico.

Tabela III-2

Intervalo	Δs (km)	Δt (h)	$\Delta s/\Delta t$ (km/h)
0,70 h — 1,4 h	50	0,70	71,5
0,70 h — 1,3 h	46	0,60	76,8
0,70 h — 1,2 h	41	0,50	82,0
0,70 h — 1,1 h	32	0,40	80,0
0,70 h — 1,0 h	20	0,30	66,7
0,70 h — 0,90 h	10	0,20	50,0
0,70 h — 0,80 h	4,0	0,10	40,0

Como você vê, a taxa de variação média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ é ela mesma uma função da extensão do intervalo de tempo Δt dentro do qual se calcula.

Estando bem entendido que a origem do intervalo Δt permanece sempre a mesma.

De que maneira varia $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ com Δt?

Só há um meio de vê-lo fàcilmente.

É fazer um gráfico!

Vá então à Fig. III-15 que representa o gráfico de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ em função de Δt.

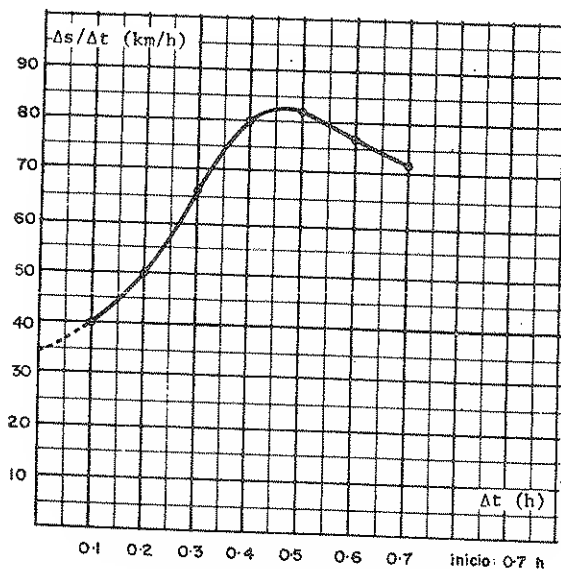



Figura III-15

Eu estou agora particularmente interessado na taxa de variação média quando o intervalo de tempo Δt é muito pequeno.

Se $\Delta t = 0{,}20$ h, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 50{,}0$ km/h.

Se $\Delta t = 0{,}10$ h, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 40{,}0$ km/h.

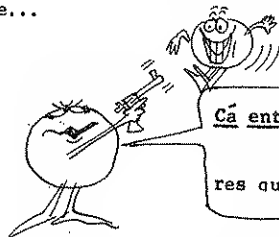
E se Δt fôr menor que 0,10h, ou seja 6 minutos? O gráfico não me diz realmente nada a êsse respeito: a última medida da Tabela III-2 foi feita para o intervalo (0,70h - 0,80h).

Mas òbviamente, se o gráfico fôr realmente uma curva contínua, que varia suavemente... então êle deve prolongar-se para valores menores que 0,10h de um modo algo semelhante com o trecho em pontilhado da figura.

Mas veja, será que não estou me arriscando muito?

Afinal das contas, estou querendo extrapolar um gráfico fora do intervalo dentro do qual foi definido meu conjunto de pontos.

A primeira pergunta é: será que $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ existe fora dêsse intervalo?

Quanto à existência de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ para os valores de Δt compreendidos entre zero (excluído) e 0,10h a partir de 0,70h, não há a menor dúvida. Pois a curva s.vs t (*) existe nêsse intervalo, e é contínua, e varia mesmo suavemente...

Cá entre nós: E o que é que você me diz da existência de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ para valores de Δt maiores que 0,70h, a partir de 0,70h?

E agora a outra pergunta: garantida a existência de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ no intervalo (0 - 0,10h), será que eu posso afirmar com razoável segurança que o gráfico no intervalo é mesmo parecido com o trecho pontilhado da figura III-15.

Volte mais uma vez ao gráfico s vs t da Fig. III-14.

Concentre sua atenção no trecho compreendido entre 0,70h e 0,80h.

O que acontece à curva nêsse intervalo?

Bem, nada de excepcional. Pelo contrário. O gráfico s vs t continua tranquilamente seu caminho. Não vira, não volta, não pula...

(*) Leia "s versus t". É notação corrente para abreviar "s em função de t".

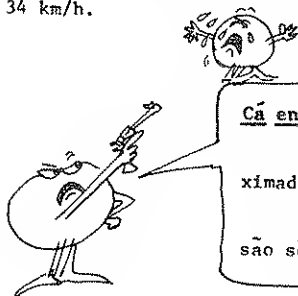
Sim, acho que podemos estar razoàvelmente seguros que o gráfico $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ vs Δt é mesmo parecido com o trecho pontilhado.

O que nos leva então naturalmente à pergunta seguinte: êsse trecho corta o eixo vertical no ponto correspondente a 34 km/h (34 ou 35; eu não posso garantir razoàvelmente a menos de úm ou dois km/h).

Qual é o sentido físico dêsse número?

É simplesmente o valor da taxa de variação média quando o intervalo de tempo se torna extremamente pequeno: um minuto, um segundo, um décimo de segundo..., mas começando sempre no instante t = 0,70h.

A êsse valor limite dá-se o nome de taxa de variação instantânea no instante considerado (aqui t = 0,70h).

Fìsicamente, no instante 0,70h eu estava andando aproximadamente a 34 km/h.

Cá entre nós: O que é que você teria que fazer se você quisesse restringir êsse "aproximadamente"?

Isto é, se você quisesse aumentar a precisão sôbre a taxa de variação instantânea?

E voltemos ràpidamente sôbre tudo isto, de um ponto de vista puramente geométrico.

O gráfico s vs t da Fig. III-14 vai servir-nos de novo. E para evitar de voltar muito para trás, eu o repeti na Fig. III-16.

O valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ no intervalo (0,70h - 1,4h) é proporcional ao coeficiente angular da <u>corda</u> AM.

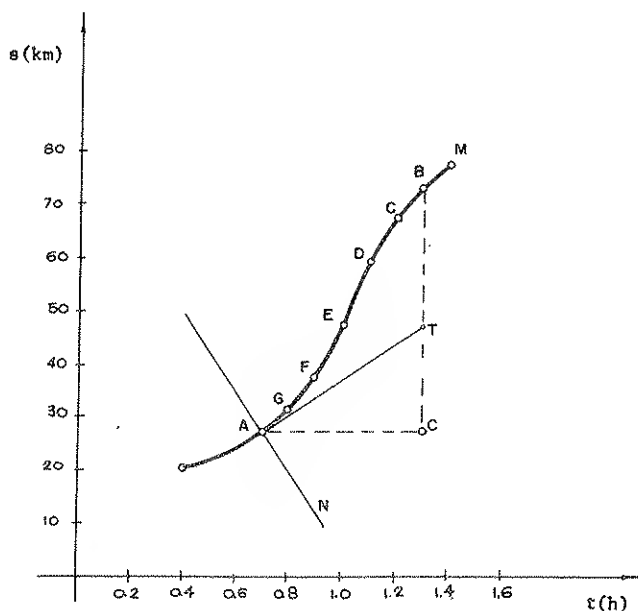



Figura III-16

O valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ no intervalo (0,70h - 1,3h) é proporcional ao coeficiente angular da <u>corda</u> AB.

Com o mesmo coeficiente de proporcionalidade.

<u>Cá entre nós</u>: E a propósito, qual é mesmo êsse coeficiente de proporcionalidade?

O valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ no intervalo (0,70h - 1,2h) é proporcional ao coeficiente angular da corda AC.

...

O valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ no intervalo (0,70h - 0,80h) é proporcional ao coeficiente angular da corda AG.

E quando Δt é muito, mas muito pequeno mesmo, o valor de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ é proporcional ao coeficiente angular da corda A..., bem, da corda AA!

Mas a corda AA é a tangente em A à curva s vs t.

Você vê então qual é a interpretação geométrica da nossa taxa de variação instantânea: é simplesmente, a menos do fator k_2/k_1, o coeficiente angular da tangente ao gráfico no ponto em que desejamos conhecer o valor dessa taxa.

E isto responde ao mesmo tempo a nossas indagações quanto a existência do valor limite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

O valor limite existe se podemos traçar a tangente à curva no ponto considerado.

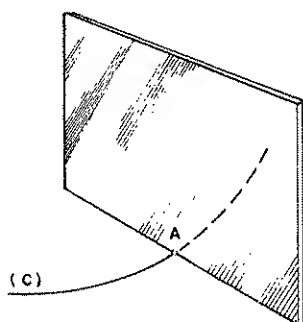
Isto é se o ponto existe.

E se a curva fôr contínua nêsse ponto.

Essa última condição será sempre satisfeita nêste Curso.

Cá entre nós: Você e eu vamos ter que construir uma certa quantidade de tangentes a curvas, no decorrer da nossa conversa.

Eu vou lhe mostrar o processo que eu utilizo.

Procure um espelhinho (dêsses com que a sua namorada retoca o baton, se você fôr Paulo, ou

N

dêsses com que você mesma retoca o baton, se você fôr Ana Maria). Coloque o espelho em pé sôbre a curva (C), fazendo passar a base pelo ponto A onde você quer traçar a tangente.

Gire o espelho até que a imagem da curva continue suavemente o trecho situado na frente do espelho, sem ponto anguloso em A. Nessa posição a base do espelho coincide com a normal à curva em A.

Trace essa normal AN com o lápis.

E construa agora com os esquadros a perpendicular em A a AN. Será a tangente AT.

Eu tracei a tangente em A à curva s vs t na Fig. III-16.

O coeficiente angular dessa tangente tem um valor provavelmente situado entre 2,0/3,0 e 2,1/3,0 (verifique!). É difícil precisar mais. E seria aliás ilusório, você não acha?

Multiplicando pelo fator de propocionalidade, $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{0,2} \frac{km}{k}$ eu acho que a taxa de variação instantânea (ou velocidade instantânea, claro) em t = 0,70h está entre 33 e 35 km/h. Eu escrevo:

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}\Bigg|_{t\,=\,0,70h} = \ldots$$

Ou melhor, você vai escrever corretamente o resultado acima.

Daquí em diante, para simplificar, representaremos a taxa de variação local ou instantânea (*) pelo símbolo dG_2/dG_1. Afinal das contas, o d é um Δ que minguou...

Resumamos em poucas palavras o que aprendemos nesta seção; um gráfico nos indica, à vista, o comportamento da taxa de variação instantânea da grandeza estudada em função do parâmetro do qual ela depende.

A taxa é constante? Então o gráfico e linear. Não é mesmo? E a relação entre G_1 e G_2 é da forma $G_2 = aG_1 + b$. A constante a representa a taxa constante de variação de G_2 em função de G_1.

A taxa não é constante? O gráfico não é uma reta. Podemos definir uma taxa de variação média no intervalo ΔG_1 pela razão $\Delta G_2/\Delta G_1$: essa razão é proporcional ao coeficiente angular da corda definida pelos pontos correspondentes às extremidades do intervalo.

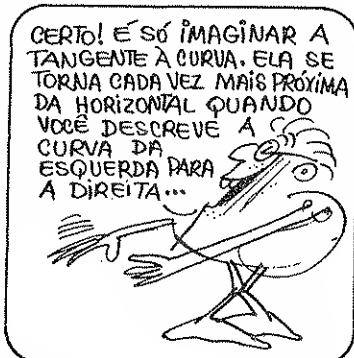
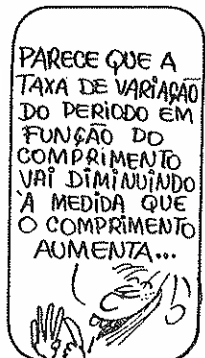
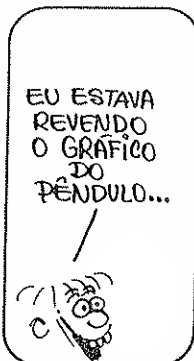
Quando ΔG_1, se torna muito pequeno, a razão precedente tende para um limite: a taxa de variação local dG_2/dG_1 no ponto considerado. Seu valor é proporcional ao coeficiente angular da tangente à curva nêsse ponto.

(*) É preferível reservar o qualificativo "instantânea" aos casos em que a variável é o tempo. Nos outros casos diga: "taxa de variação local", ou simplesmente "taxa de variação" quando não pode haver confusão.

MARTINS E EU 05

EU ESTAVA REVENDO O GRÁFICO DO PÊNDULO...

PARECE QUE A TAXA DE VARIAÇÃO DO PERÍODO EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO VAI DIMINUINDO À MEDIDA QUE O COMPRIMENTO AUMENTA...

CERTO! É SÓ IMAGINAR A TANGENTE À CURVA. ELA SE TORNA CADA VEZ MAIS PRÓXIMA DA HORIZONTAL QUANDO VOCÊ DESCREVE A CURVA DA ESQUERDA PARA A DIREITA...

III-5 Alguns tipos importantes de gráficos.

Muitos fenômenos naturais são descritos por um dos cinco tipos de gráficos a seguir:

1) o gráfico linear, já encontrado. A relação de dependência entre as grandezas G_1 e G_2 é da forma $G_2 = aG_1 + b$.
2) o gráfico parabólico.
3) o gráfico hiperbólico.
4) o gráfico do tipo "inverso do quadrado".
5) o gráfico senoidal.

Estudemos ràpidamente os tipos (2) (3) e (4). O gráfico senoidal será objeto de um capítulo especial: o capítulo sôbre o movimento harmônico simples.

III-5-1 O gráfico parabólico.

G_1 e G_2 são ligados por uma relação da forma

$$\boxed{G_2 = aG_1^2 + bG_1 + c} \qquad \text{(III-15)}$$

em que a b c são constantes.

O gráfico de G_2 vs G_1 é um arco de parábola (Fig. III-17).

Mas o problema é: dado o gráfico experimental, como reconhecer-se é do tipo parabólico?

Você pode reconhecer o gráfico parabólico pelo fato que a taxa de variação local dG_2/dG_1 <u>é uma função linear de G_1</u>.

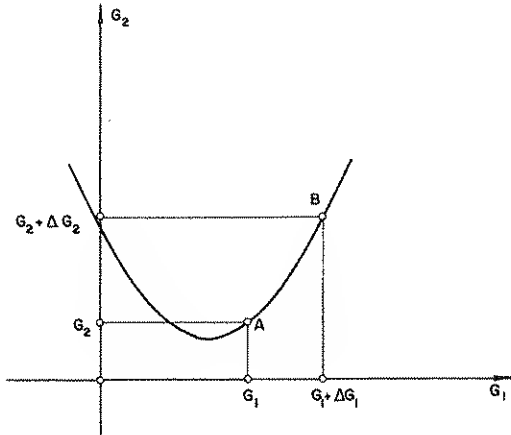



Figura III-17

A demonstração disto é facílima. Veja (e siga comigo!). Eu dou a G_1 na equação (III-15) e no gráfico da Fig. III-17 os valores sucessivos G_1 e $G_1 + \Delta G_1$. Os valores correspondentes de G_2 são

$$G_2 = aG_1^2 + bG_1 + c \qquad \text{(III-16)}$$

e

$$G_2 + \Delta G_2 = a(G_1 + \Delta G_1)^2 + b(G_1 + \Delta G_1) + c \qquad \text{(III-17)}$$

Subtraia (III-16) de (III-17):

$$\Delta G_2 = a\left[G_1^2 + 2G_1\Delta G_1 + (\Delta G_1)^2 - G_1^2\right] + b(G_1 + \Delta G_1 - G_1) + c - c$$

ou seja

$$\Delta G_2 = a\ \Delta G_1\ (2G_1 + \Delta G_1) + b\ \Delta G_1$$

Divida tudo por ΔG_1:

$$\frac{\Delta G_2}{\Delta G_1} = a(2G_1 + \Delta G_1) + b \qquad \text{(III-18)}$$

Já temos a taxa de variação média. Você observa que essa taxa é função do valor que eu der a ΔG_1. Mas já encontramos isto na seção III-4-4, lembra?

Para passarmos à taxa de variação local, é só tornar ΔG_1 muito pequeno, mas muito pequeno mesmo. Então òbviamente o ΔG_1 que você tem no parêntese do segundo membro de (III-18) é desprezível em comparação com $2G_1$, de modo que, no limite:

$$\boxed{\frac{dG_2}{dG_1} = 2aG_1 + b} \qquad \text{(III-19)}$$

Viu como é simples? A taxa de variação local é realmente uma função linear de G_1.

De modo que se você desconfiar, pelo aspecto do gráfico, que G_2 possa ser uma função de G_1 do tipo (III-15), trace tangentes, calcule coeficientes angulares, transforme em taxas de variações... e tente um gráfico dessa taxa em função de G_1. Se fôr razoàvelmente uma reta, você tinha alguma razão de desconfiar.

Observe aliás que a taxa de variação constante dessa reta é o dôbro do coeficiente a da equação (III-15).

Você não vê por quê? Olhe bem para a equação (III-19)...

Há um caso particular que torna as coisas mais fáceis: se os coeficientes b e c da relação (III-15) são nulos, a relação entre G_1 e G_2 é da forma

$$\boxed{G_2 = a\ G_1^{\ 2}} \qquad \text{(III-20)}$$

e nêsse caso a parábola é tangente na origem ao eixo das abscissas (Fig. III--18).

Se você desconfiar que isto possa ser o caso, construa o gráfico de G_2 em função de G_1^2.

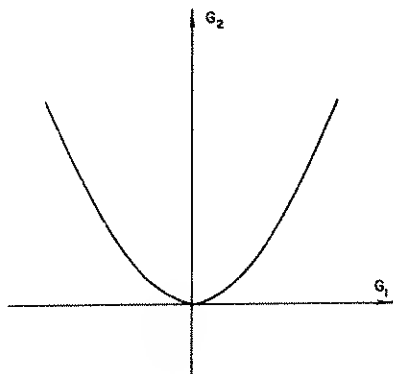
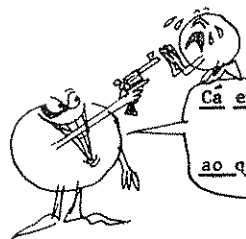



Figura III-18

__Cá entre nós:__ Observe bem a relação (III-20). Como é que G_2 varia em função de __G_1 ao quadrado__?

Você já viu que G_2 é uma função __linear__ de G_1^2.

E mais especìficamente ainda, G_2 é __proporcional__ a G_1^2.

O gráfico de G_2 em função de G_1^2 deve ser uma reta que passa pela __o__rigem.

E o coeficiente constante __a__ da relação (III-20) é proporcional ao coeficiente angular dessa reta.

III-5-2 O gráfico hiperbólico.

G_1 e G_2 são ligados por uma relação da forma

$$\boxed{G_2 = \frac{a}{G_1}} \qquad \text{(III-21)}$$

em que a é uma constante.

O gráfico G_2 vs G_1 é um ramo de hipérbole equilátera (Fig.III-19).

Se a fôr positivo, a hipérbole está disposta como na Fig.III-19-a.

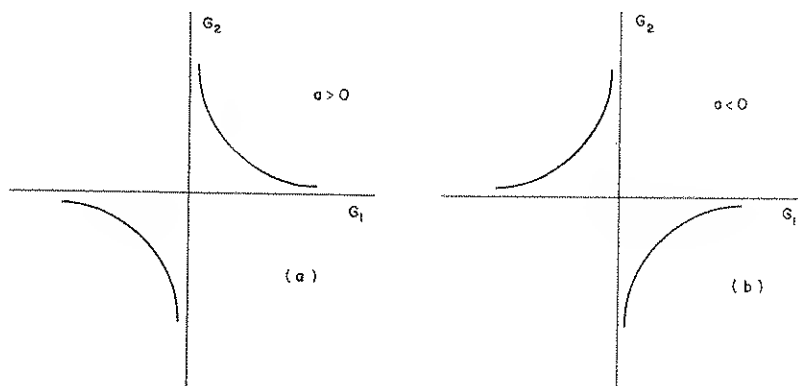



Figura III-19

Se a fôr negativo ela está disposta como na Fig. III-19-b.

Se você desconfiar pelo seu gráfico que a relação entre G_2 e G_1 possa ser da forma (III-21), observe que G_2 é proporcional ao inverso de G_1. Construa então o gráfico G_2 vs $1/G_1$. O coeficiente a de (III-21) será a taxa de variação constante da reta que você terá (possivelmente) obtido (*).

III-5-3 O gráfico do tipo "inverso do quadrado".

G_1 e G_2 são ligados por uma relação da forma

$$G_2 = \frac{a}{G_1^{\,2}} \qquad \text{(III-22)}$$

em que a é uma constante.

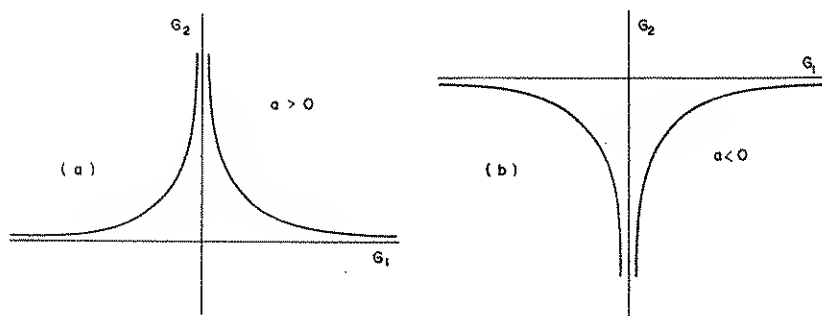



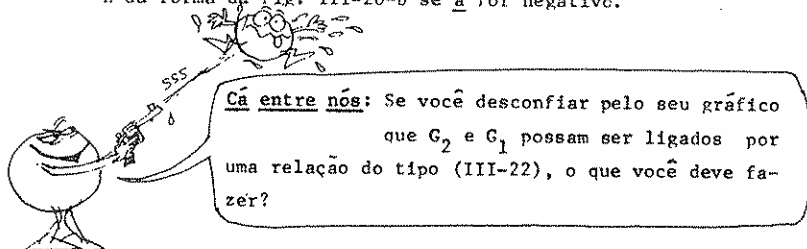
Figura III-20

(*) Òbviamente, há uma maneira aparentemente muito mais simples de verificar que $G_2 = a/G_1$. É só fazer o produto G_2G_1. Se fôr constante...

No entanto, em trabalho experimental você encontrará raramente um produto constante. Êle poderá oscilar em tôrno de um valor médio. Êsse valor será muito mais fàcilmente encontrado em primeira aproximação pela reta G_2 vs $(1/G_1)$.

O gráfico G_2 vs G_1 será da forma da Fig. III-20-a se <u>a</u> fôr positivo.

E da forma da Fig. III-20-b se <u>a</u> fôr negativo.

<u>Cá entre nós</u>: Se você desconfiar pelo seu gráfico que G_2 e G_1 possam ser ligados por uma relação do tipo (III-22), o que você deve fazer?

Finalmente, não vá pensar que encontraremos em Física sòmente gráficos dos tipos estudados aqui.

Êstes são os mais simples.

Mas há muitos outros.

Paciência! Você os encontrará mais tarde.

III-6 <u>De volta ao pêndulo</u>.

Vejamos se o que aprendemos até agora dá para chegar a alguma conclusão no problema do pêndulo.

Voltemos juntos à Fig. III-7 que para maior comodidade está repetida na Fig. III-21.

Figura III-21

Os tipos hiperbólico e "inverso do quadrado" são eliminados por simples inspeção.

Será que haveria uma possibilidade do gráfico ser parabólico?

Bem, à primeira vista, a curva da Fig. III-21 poderia ser um ramo de parábola.

Mas de uma parábola com o eixo horizontal, e não vertical como no

caso da Fig. III-17.

Não faz mal. Se assim fôr, o comprimento ℓ deve ser uma função do período T da forma

$$\ell = a\,T^2 + bT + c \qquad \text{(III-23)}$$

E então a taxa de variação local $d\ell/dT$ deve ser uma função linear do período T.

Na Fig. III-21 eu tracei sete tangentes à curva, pelo método do espelho, nos pontos T = 0,88s, 1,08s, 1,26s, 1,42s, 1,55s, 1,67s e 1,80s.

E eu achei (verifique você mesmo, fazendo as medidas sôbre o gráfico):

Tabela III-3

T (s)	Coeficiente angular da tangente	Taxa de variação local (m/s)
0,88	1.76	0,44
1,08	2,00	0,50
1,26	2,50	0,62
1,42	2,64	0,66
1,55	3,02	0,75
1,67	3,34	0,84
1,80	3,57	0,89

Observe: o coeficiente angular e a taxa de variação se referem às tangentes à curva ℓ vs T, e não à curva T vs ℓ!

Figura III-21

Os tipos hiperbólico e "inverso do quadrado" são eliminados por simples inspeção.

Será que haveria uma possibilidade do gráfico ser parabólico?

Bem, à primeira vista, a curva da Fig. III-21 poderia ser um ramo de parábola.

Mas de uma parábola com o eixo horizontal, e não vertical como no

caso da Fig. III-17.

Não faz mal. Se assim fôr, o comprimento ℓ deve ser uma função do período T da forma

$$\ell = a\,T^2 + bT + c \qquad \text{(III-23)}$$

E então a taxa de variação local $d\ell/dT$ deve ser uma função linear do período T.

Na Fig. III-21 eu tracei sete tangentes à curva, pelo método do espelho, nos pontos T = 0,88s, 1,08s, 1,26s, 1,42s, 1,55s, 1,67s e 1,80s.

E eu achei (verifique você mesmo, fazendo as medidas sôbre o gráfico):

Tabela III-3

T (s)	Coeficiente angular da tangente	Taxa de variação local (m/s)
0,88	1.76	0,44
1,08	2,00	0,50
1,26	2,50	0,62
1,42	2,64	0,66
1,55	3,02	0,75
1,67	3,34	0,84
1,80	3,57	0,89

Observe: o coeficiente angular e a taxa de variação se referem às tangentes à curva ℓ vs T, e não à curva T vs ℓ!

O gráfico $d\ell/dT$ vs T é construído na Fig. III-22.

O gráfico é razoàvelmente linear, em primeira aproximação, e a reta construída, quando prolongada, passa pela origem.

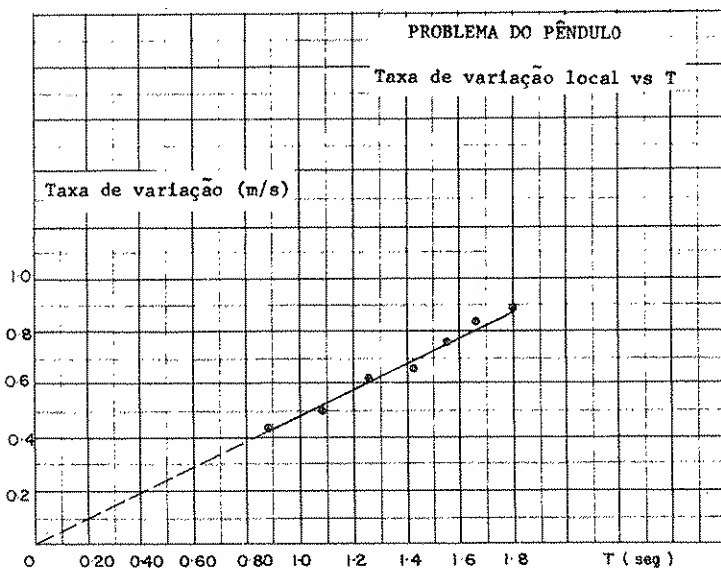



Figura III-22

A taxa de variação constante dêsse gráfico é igual a 0,48 $\frac{m/s}{s}$ (verifique).

Então (veja de novo a equação III-19):

$$\frac{d\ell}{dT} = 0{,}48\ T.$$

Concluímos que o coeficiente a da equação (III-23) é igual a

$$0{,}24\ \frac{m/s}{s}$$

e que o coeficiente b é nulo.

De modo que, se realmente $\frac{d\ell}{dT}$ fôr proporcional a T, como o gráfico da Fig. III-22 parece indicar, a relação entre $\underline{\ell}$ e T deve ser da forma

$$\ell = 0{,}24\ T^2 + c \qquad (\underline{\ell} \text{ em m, T em s})$$

ou talvez simplesmente

$$\ell = 0{,}24\ T^2 \qquad \text{(III-24)}$$

se por acaso a constante c fôsse nula, e então teríamos o caso particular assinalado em III-5-1: o comprimento do pêndulo seria proporcional ao quadrado do comprimento.

Fìsicamente, essa última hipótese lhe parece correta?

Isso significaria que o período vai a zero ao mesmo tempo que o comprimento, não é?

Evidentemente, a experiência tende a provar que isto é bem o caso: à medida que eu vou encurtando o comprimento do barbante, o período diminui.

Só há um inconveniente: eu não posso ir até zero, òbviamente, pois em zero, não há mais pêndulo.

Mas eu nem posso me aproximar muito de zero: eu encontro a garrafa de tinta Nankin antes.

E eu acredito que sua intuição física - como a minha - lhe sôpra ao ouvido que uma coisa é ter um barbante de 50 cm com uma pedra, ou um frasco de 3 ou 4 cm.

E outra coisa é ter um barbante de 3 a 4 milímetros com a mesma pedra, ou o mesmo frasco, de 3 a 4 centímetros.

Mas temos um recurso: o indicado naquela mesma seção III-5-1. Se $\underline{\ell}$ fôr proporcional a T^2, basta construir o gráfico $\underline{\ell}$ vs T^2, e ver o que acontece.

É o que eu fiz na Fig. III-23. (Você deverá evidentemente construir o seu próprio gráfico $\underline{\ell}$ vs T^2, a partir dos seus dados experimentais).

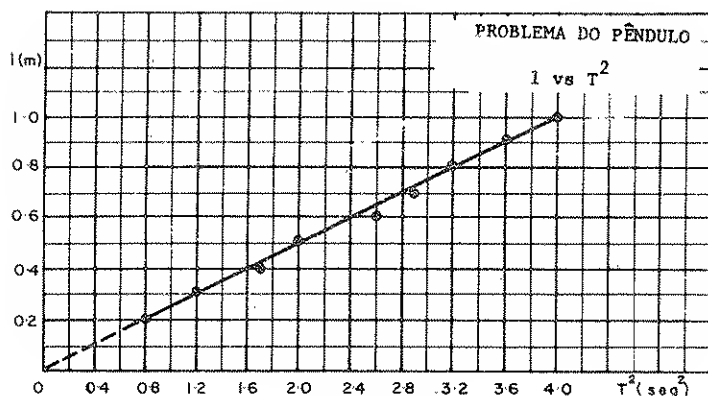
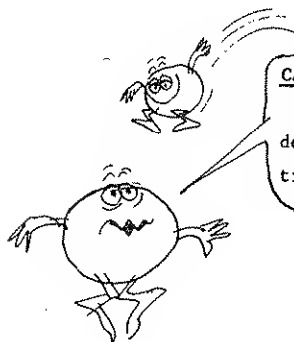



Figura III-23

Ao observar os pontos lançados, eu concluo muito razoàvelmente que o gráfico associado é uma reta que, prolongada, passa pela origem.

O coeficiente angular dessa reta é 0,49, e a taxa de variação constante correspondente é 0,24 m/s^2, o que é a mesma coisa que 0,24 $\frac{m/s}{s}$, não é mesmo?

Eu acho que finalmente eu posso concluir que, em primeira aproximação e sujeito à confirmação por experiências mais precisas, a relação entre comprimento e período de meu pêndulo é

$$\ell = 0{,}24\ T^2, \quad \text{ou} \quad T = 2{,}0\sqrt{\ell} \qquad (\ell \text{ em m, } T \text{ em s})$$

III-7 Uma palavra de aviso.

Chegamos finalmente ao término dêsse Capítulo.

Eu estou consciente das dificuldades que você terá encontrado no caminho.

Mas valeu a pena vencê-las, porquê você não poderia fazer bôa Física se você não soubesse bem o que acabamos de estudar juntos.

Os gráficos são em Física o pão de cada dia.

Você aprendeu, em parte, a ouvir o que êles contam.

Mas cuidado! Não queira fazer dizer a um gráfico o que êle não quer dizer.

Eu me refiro ao perigo das extrapolações.

Se você construiu um gráfico a partir de dados obtidos experimentalmente, e se você soube interpretar o que o gráfico está lhe contando, você terá talvez chegado a uma relação matemática que expressa a correlação existente entre a grandeza observada e o parâmetro escolhido como variável.

Se o fenômeno estudado fôr um fenômeno natural (queda de um corpo, oscilação de um pêndulo, dilatação térmica de um metal...), você obteve assim a expressão de uma lei física.

Mas nunca esqueça que essa lei é sòmente válida dentro dos limites da sua experiência.

Se você quizer saber o que acontece fora do intervalo das suas medidas, é preferível fazer novas experiências que prolongar sem os devidos cuidados uma curva de um gráfico.

Você viu no exemplo do pêndulo que não teria sentido nenhum querer extrapolar para comprimentos da ordem de milímetros a lei (se realmente houver lei) que descobrimos para comprimentos da ordem de dezenas de centímetros.

Se quizermos saber o que acontece na nossa região "inexplorada" teremos que fazer novas experiências.

E novos gráficos...

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas "estrelados" (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

*III-1 Na Tabela III-1, eu lancei todos os períodos com dois algarismos significativos, a não ser o primeiro (correspondente ao comprimento ℓ = 0,20m) que eu forneci com um só algarismo significativo.

Qual poderá ter sido a razão disto?

*III-2 Você dispõe de uma fôlha de papel almaço, cuja largura é 22cm.

Qual é a escala que você poderá utilizar se você quiser lançar, sôbre um eixo traçando na largura da fôlha, velocidades que variam de zero até 25 m/s?

Não esqueça que todo trabalho bem apresentado deve ter margens razoáveis.

III-3 Nas mesmas condições que as do Problema III-2, você quer lançar velocidades que variam de -4,0 até +12 cm/s.

Qual é a escala utilizada? Faça a correspondência gráfica.

III-4 Nos gráficos das Figs. III-15, III-22 e III-23, as escalas utilizadas não foram indicadas. Quais são essas escalas?

*III-5 Uma escala linear é no caso geral definida por uma relação da forma

$$G = kx$$

Em que casos a constante k é um número puro?

III-6 Foi necessário reduzir fotogràficamente a Fig. III-3 para poder incluí-la nêste livro. De modo que a unidade assinalada não tem, na figura que você tem debaixo dos olhos, o comprimento de um centímetro.

Quais são então, na figura atual, as escalas dos dois eixos?

*III-7 Peça ao seu Professor de lhe comunicar a frequência nas aulas de Física durante o último mês. Lance em abscissa a data das aulas (qual a escala?) e em ordenadas o número de alunos presentes (qual a escala?). Você obtém assim um conjunto de pontos, imagens dos pares (data do calendário, número de alunos presentes).

Você pode ligar êsses pontos por uma curva contínua?

*III-8 Meça a espessura de uma fôlha dêste livro (qual o processo que você utiliza?).

Você pode construir um gráfico espessura do livro vs número de páginas? (não inclua a capa).

No caso afirmativo, tenha sempre o cuidado de especificar suas escalas.

*III-9 A Tabela seguinte reproduz dados relativos a satélites artificiais em órbita quase circular (*).

Altitude (km)	Período (min)
480	94
567	96
700	99
920	103
1015	105
1300	112
2790	146
3660	167

(*) Os dados referem-se a satélites artificiais <u>realmente</u> postos em órbita. (Dados extraídos de publicações da NASA).

Lance êsses dados em gráfico (altitude em absciasa, período em ordenada). Quais são as suas escalas?

Você acha justificável unir os pontos por uma curva contínua?

No caso afirmativo, analise sob todos os aspectos o gráfico obtido.

Você se arriscaria a responder à seguinte pergunta:

"Se fôsse possível colocar um satélite em órbita rasante (altitude zero) qual seria o seu período?".

*III-10 A seguinte tabela fornece os mesmos dados (ver Problema precedente) para quatro satélites também em órbita quase circular, mas em altitudes sensìvelmente maiores:

Altitude (km)	Período (min)
$3,37 \times 10^4$	$1,33 \times 10^3$
$3,58 \times 10^4$	$1,44 \times 10^3$
$1,03 \times 10^5$	$6,02 \times 10^3$
$1,10 \times 10^5$	$6,51 \times 10^3$

Examine de novo as conclusões a que chegou no problema precedente, à vista dêsses novos dados.

III-11 Medindo, em função do tempo, a temperatura da água contida em uma panela você obteve a seguinte tabela:

Tempo (min)	Temperatura (°C)
0	100
15	86
25	79
40	75
60	72
75	70

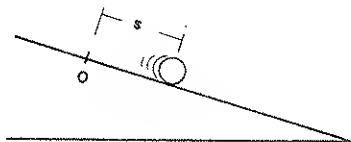
a) Construa <u>com o máximo cuidado</u> a curva do gráfico temperatura vs tempo.

b) Qual é a taxa de esfriamento instantânea em t = 5,0 min? Em t = = 30 min? Em t = 70 min?

c) Qual é a taxa de esfriamento média no intervalo (0,75 min)?

*III-12 Referindo-se ao problema precedente, e mais especìficamente à resposta do ítem (c) quando comparada às do ítem (b), há algo que lhe chamou a atenção?

Você pode generalizar a conclusão a que você deve ter chegado?

III-13 Aqui estão os resultados das medidas efetuadas numa experiência em que uma bola desce ao longo de um trilho sôbre um plano inclinado.

As distâncias percorridas s são contadas a partir do ponto em que a bola foi largada. O instante zero coincide com o instante do largamento.

t (s)	s (cm)
2,0	5,0
2,5	8,7
3,0	12,3
3,5	15,7
4,0	21,7
4,5	27,0
5,0	33,0
5,5	40,8
6,0	48,5

a) Construa o gráfico s vs t.

b) Qual é a taxa de variação instantânea (velocidade instantânea) nos instantes t = 2,0s, t = 3,0s, t = 4,0s, t = 5,0s, t = 6,0s?

c) Qual é a taxa de variação média (velocidade média) nos intervalos (2,0 - 4,0s), (3,0 - 5,0s) (4,0 - 6,0s)?

d) Compare êsses últimos resultados aos obtidos no ítem (c).

III-14 Refira-se ao problema precedente. Tente descobrir, gràficamente, uma relação matemática entre s e t.

III-15 Em condições análogas às do problema III-14, a origem das distâncias percorridas e a origem dos tempos coincidem com a passagem da bola pelo ponto 0.

Porém nesta experiência a bola foi lançada de um ponto situado acima de 0.

$\underline{t}$ (s)	$\underline{s}$ (cm)
1,0	8,8
1,5	17,5
2,0	28,3
2,5	41
3,0	57,2
3,5	75,3
4,0	95,7
4,5	119,3
5,0	144,5

a) Construa o gráfico $\underline{s}$ vs $\underline{t}$.

b) Qual é a taxa de variação instantânea (velocidade instantânea) nos instantes 2,0s? 2,5s? 3,0s? 3,5s? 4,0s?

c) Qual é a taxa de variação média (velocidade média) nos intervalos (1,0-3,0s);(1,5-3,5s);(2,0-4,0s);(2,5-4,5s);(3,0-5,0s)? Compare êsses resultados com os obtidos no ítem (b).

III-16 Refira-se ao problema precedente. Tente descobrir, gràficamente, uma relação matemática entre $\underline{s}$ e $\underline{t}$.

*III-17 Refira-se à Figura III-9. No texto, eu calculei o valor da constante $\underline{a} \equiv \Delta s/\Delta t$ tomando como intervalo (0,6h - 1,4h). Como no entanto eu afirmo que o intervalo pode ser escolhido arbitràriamente, você poderia decidir de utilizar o intervalo (0,8h - 1,0h).

Ora pela tabela, em t = 0,8h a distância $\underline{s}$ valia 48,5 km, e em t = = 1,0h ela valia 52 km. De modo que $\underline{a}$ seria igual a 52-48,5/1,0-0,8=17,5km/h.

Por quê a diferença com o $\underline{a}$ calculado no texto?

E qual dos dois é o mais provável?

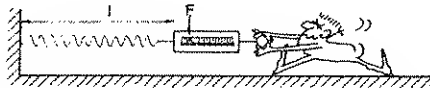
*III-18 No problema do pêndulo (seção III-6) eu me refiro à taxa de variação <u>local</u> do comprimento em função do tempo. Não seria mais próprio, do

momento que o parâmetro é precisamente o tempo, falar em taxa de variação ins tantânea?

*III-19 Na seção III-4-2 eu lhe expliquei que a taxa de variação não é <u>igual</u> ao coeficiente angular da reta (ou da tangente ao gráfico se êste não fôr linear).

Haverá casos em que a taxa de variação instantânea é realmente <u>i-gual</u> ao coeficiente angular da tangente ao gráfico no ponto considerado? Discuta.

*III-20 A fotografia mostra uma mola helicoidal.

Para comprimir ou para alongar uma mola é preciso exercer fôrças. Eu sei que ainda não falamos - ou quase - de fôrças, mas o seu conceito intuitivo é o suficiente por enquanto.

As fôrças se medem numa unidade chamada Newton (N) que discutiremos mais tarde.

Eu amarrei uma extremidade da mola a um aparelho de medir fôrças, a outra extremidade a um suporte fixo, e eu medi a fôrça correspondente a um determinado comprimento $\underline{\ell}$ da mola. Os resultados foram:

ℓ (cm)		F (N)
28		4,0
26		2,9
24		2,2
22		1,3
20		0,7
18,5	(comprimento normal da mola)	0
16		1,0
14		1,7
12		2,5
10		3,5

a) Construa o gráfico F vs ℓ. Você lançará os valores de F como negativos quando $\ell > 18{,}5$cm, e como positivos quando $\ell < 18{,}5$cm.

b) Você pode achar uma relação matemática entre F e ℓ? (É a chamada lei de fôrça da mola).

c) Qual é a fôrça exercida quando o comprimento da mola é 25cm? 15cm? 100cm? 1,0cm?

III-21 Você talvez já saiba que o comportamento da água na vizinhança de 4^{o}C não é lá muito ortodoxo.

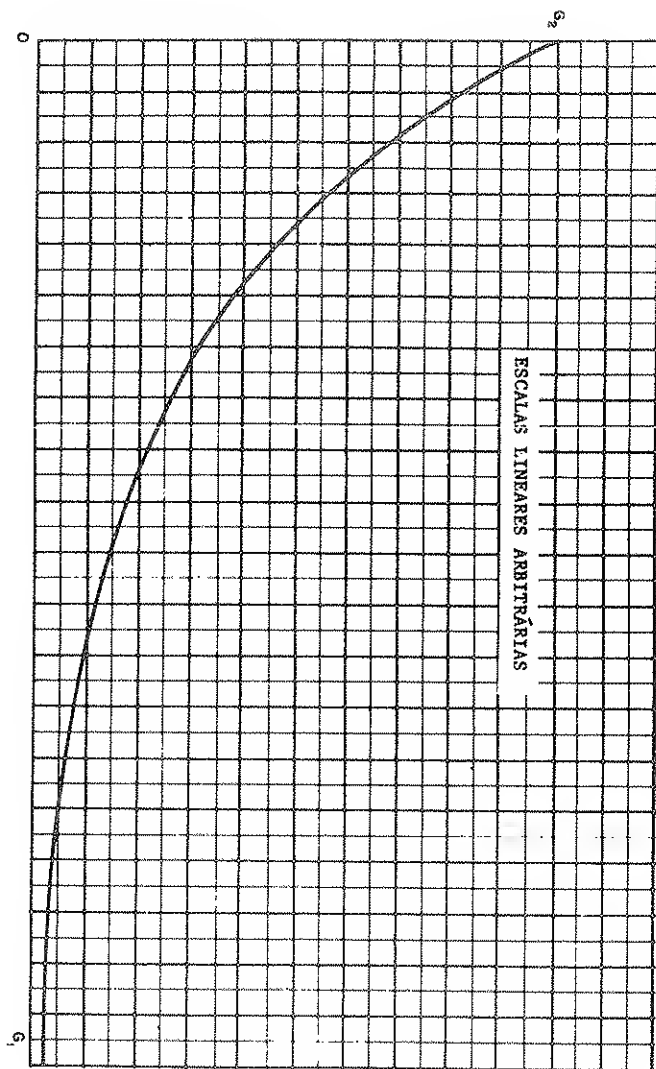
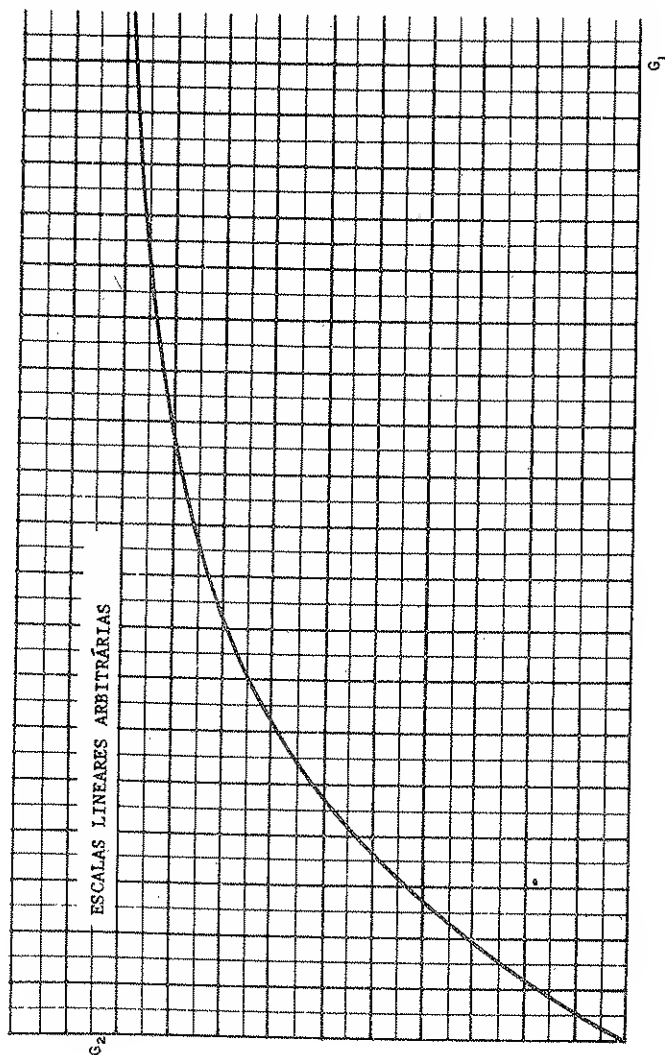
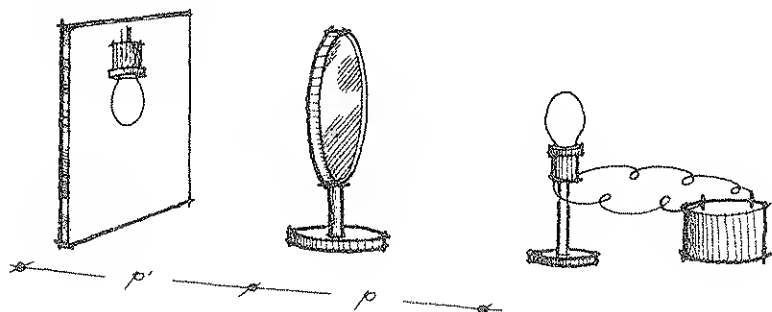
Querendo então medir com três algarismos significativos a temperatura da água nessa região, eu calibrei meu termômetro comparando-o com um instrumento de precisão, e eu obtive a seguinte tabela. Ela indica a temperatura T indicada pelo aparelho em função da temperatura θ lida no meu termômetro.

θ (grau)	T (°C)
0,00	0,00
1,00	1,01
2,00	2,04
3,00	3,09
4,00	4,16
5,00	5,25
6,00	6,36
7,00	7,49
8,00	8,64

a) Construa a "curva de calibração" do termômetro, isto é o gráfico $\underline{T}$ vs $\underline{\theta}$.

b) Qual seria a temperatura marcada pelo aparelho de precisão quando meu termômetro indica 4,16°? 10°?

*III-22 Gráficos semelhantes ao da fotografia são muitas vêzes encontrados em Física. Estaria por enquanto fora do seu alcance procurar a relação matemática entre G_1 e G_2. Mas você pode achar a relação entre a taxa de variação local dG_2/dG_1 e G_2. Qual é essa relação? (Transporte primeiro o grá-

fico para papel vegetal).

*III-23 Mesmo problema que o III-22 para o gráfico representado abaixo.

III-24 Colocando uma lâmpada em frente de uma lente eu recolho a imagem sôbre um anteparo.

Sendo p a distância lâmpada-lente e p' a distância lente-anteparo, eu observo que p' é função de p. Medindo os valores de p' correspondentes a várias distâncias p eu obtenho:

p(cm)	p'(cm)
2,5	10
3,0	6,0
4,0	4,0
6,0	3,0
8,0	2,7
10	2,5

a) Construa o gráfico de p' vs p.

b) Você achá fácil descobrir pelo gráfico acima uma relação matemática entre p e p'?

c) Qual é o gráfico (p' - 2,0cm) vs (p - 2,0cm). Não faça um novo gráfico! O que eu peço está contido no gráfico construído em (a).

d) Será que agora é mais fácil achar uma relação matemática entre p e p'?

CAPÍTULO IV

Cinemática escalar - I - Os Conceitos

IV-1 Por quê Cinemática?

Êsse capítulo e os três seguintes são consagrados ao estudo do movimento de uma partícula.

E em grego, movimento se diz "kinéma". Daí cinemática.

Você se pergunta talvez qual é a razão de estudar o movimento.

É que um Universo em que não haveria movimento seria um bocado monótono. Não acha?

E nem você nem eu estaríamos aqui para contar esta história.

Mesmo porque não haveria história para contar.

Não há um assunto em Física em que o movimento não tenha um papel preponderante.

Desde os primeiros passos que dá uma criança.

Ao sangue que circula nas suas veias.

Ao carro que anda e ao trem que circula.

À ronda dos planêtas e dos satélites.

À dança incessante das moléculas do ar que você respira, e da água que você bebe.

Às vibrações dos átomos e dos íons no lápis com que você escreve e no garfo com que você come.

Às andanças erráticas porém obstinadas dos elétrons nos fios condutores que canalizam a corrente elétrica.

Às ondas que nossos olhos vêm, e às que nossos ouvidos ouvem.

Às partículas que riscam o cosmos com velocidades fantásticas.

Tudo é movimento, porque o movimento é essencial à própria matéria.

Acontece que o movimento de uma partícula é caracterizado por uma trilogia: posição, velocidade, aceleração.

E é precisamente pela aceleração do seu movimento que uma partícula nos contará a história das suas relações (diremos interações) com as suas vi-

zinhas.

Eis porque o estudo da Cinemática é indispensável ao estudo da Física.

IV-2 Por quê escalar?

Você tem 16 anos.

João "pesa" 63 kg.

A temperatura lá fora é 26°C.

A distância Rio-São Paulo é 400 km.

...

Há grandezas cujas medidas são perfeitamente determinadas por um só número.

Êsse número pode ser um número algébrico, aliás. Se aqui e agora a temperatura é + 26°C, é muito provável que na Terra de Fogo, ou nos cumes dos Andes ela seja - 30°C, ou - 15°C.

Essas grandezas são chamadas escalares.

Mas considere o ponto do i que eu estou escrevendo. Qual é a posição dêsse ponto nesta página?

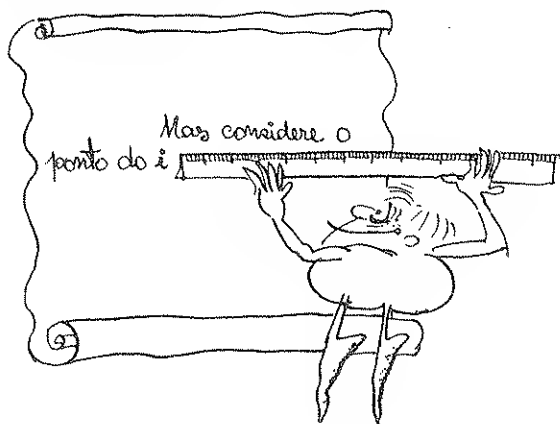



Figura IV-1

Evidentemente, para definir essa posição, um número não basta.

Mas dois são suficientes.

Eu meço a distância do ponto à borda direita da fôlha: 10cm; eu meço também a distância até a borda superior: 16cm.

Òbviamente, o par (10,16) é suficiente para definir a posição do ponto.

Se uma grandeza não pode ser medida por um só número, não é uma grandeza escalar.

O que é então?

Quando você souber muito mais Física do que eu possa lhe ensinar nêste Curso, você terá a prudência de responder: "...Bem, eu não sei. Pode ser uma grandeza vetorial, pode ser uma grandeza tensorial, pode ser...".

Mas por enquanto, se uma grandeza não puder ser medida por um número só, será sempre uma grandeza vetorial.

Uma grandeza vetorial necessita dois (no plano) ou três (no espaço) números para sua medição.

Encontraremos as primeiras grandezas vetoriais da Física no Capítulo VI.

Nêste Capítulo tôdas as grandezas necessárias à descrição do movimento de uma partícula poderão ser medidas por um número só.

E isto será possível porque vamos iniciar a Cinemática pelo caso mais simples: o caso em que nada nos interessa da geometria da trajetória.

Em outras palavras, o que vamos aprender agora poderá ser aplicado idênticamente nos casos em que a trajetória fôr uma reta, uma circunferência, uma elipse, uma hélice...

Eis porque eu chamo a Cinemática dêste Capítulo: "Cinemática Escalar".

IV-3 Partículas.

Êste Capítulo e os três seguintes são consagrados à Cinemática da partícula.

O que é que entendemos por partícula, nesta altura do Curso?

Qualquer objeto cujas dimensões são muito pequenas em comparação com as dimensões e as distâncias envolvidas na experiência: uma bola de gude que percorre alguns metros; uma formiga que percorre alguns centímetros; a Lua que percorre sua órbita em tôrno da Terra...

E como condição suplementar, qualquer objeto cuja "estrutura interna" não tenha realmente importância no movimento que estamos estudando.

Eu vou tentar explicar isto um pouco melhor.

Em primeira aproximação, eu posso tratar o movimento de meu carro numa estrada como o movimento de uma partícula, se sòmente me interessarem a distância percorrida, a velocidade que êle tinha em tal instante etc...

Mas se eu quero saber como êle se comporta ao passar por pedras ou buracos, se eu quero avaliar sua estabilidade em curvas, então eu não posso mais considerá-lo como sendo uma partícula. Eu preciso saber que êle tem uma "estrutura interna": quatro rodas, amortecedores, barras de torção etc...

E se você quiser saber das fases da Lua, você não pode mais confundí-la com uma partícula.

Você vê que no fundo tudo é uma questão de escala.

E também uma questão de saber o que você quer fazer com as informações que você está recolhendo.

IV-4 Trajetória.

Vamos então a nossa bola de gude, ou a nossa formiga, a nossa partícula enfim.

Desde que as suas dimensões são muito pequenas em comparação com as distâncias que eu vou medir, eu posso considerá-la como um ponto.

O centro da bola por exemplo.

Eu lanço a bola no ar. Ela descreve uma curva. Essa curva é chamada trajetória da bola.

Uma estrada é, em primeira aproximação, a trajetória do carro que anda sôbre ela.

Se você quiser uma definição você poderia dizer que "a trajetória é o conjunto dos pontos do espaço sucessivamente ocupados pela partícula no seu movimento".

Mas isto é um pouquinho pomposo talvez, e eu pessoalmente não faço muita questão que você saiba definições.

É muito mais interessante observar bolas de ping-pong, ou formiguinhas.

Ou os rastros brancos deixados pelos jatos, lá em cima no grande céu azul.

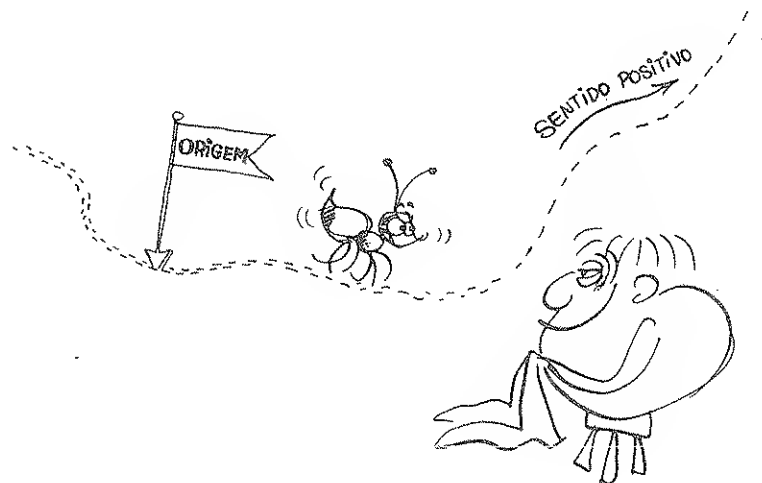



Figura IV-2

Muito bem, a trajetória é uma curva. *Qualquer curva* nêste Capítulo.

E vamos "prepará-la" para podermos estudar convenientemente o movimento da partícula.

A preparação da trajetória é uma operação muito simples. Ela consiste em escolher um ponto (em princípio qualquer) a partir do qual mediremos distâncias e que chamaremos *origem.*

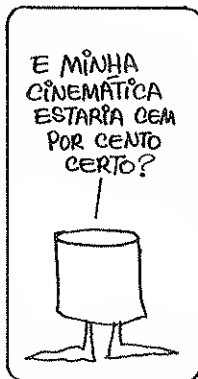
E um sentido de percurso, também arbitrário (em princípio) e que chamaremos *sentido positivo*. Essa última operação é a *orientação* da trajetória.

De modo que, como diria o Conselheiro Acácio, a partícula pode movimentar-se no sentido positivo ou no sentido negativo da trajetória.

Na prática qual é a origem e qual é o sentido positivo que você deverá escolher?

Se por exemplo você quiser estudar a Cinemática de uma viagem Rio - São Paulo, você escolherá o Rio de Janeiro como origem. E o sentido do Rio para São Paulo como sentido positivo.

MARTINS E EU 06

MAS PORQUE É QUE ALGUÉM IRIA COMPLICAR INUTILMENTE A EXISTÊNCIA?

IV-5 Posição escalar.

O primeiro problema da Cinemática escalar é:

"Como se determina a posição da partícula sôbre a trajetória?"

É muito simples. Suponha que a partícula esteja agora em M (Figura IV-3).

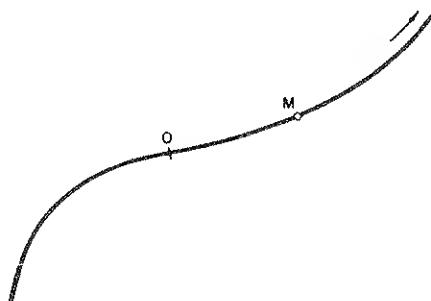



Figura IV-3

Faça uma marca sôbre a trajetória, no ponto que coincida agora com a partícula.

Por quê?

Mas porque a partícula está em movimento, lembra? Ela está agora em M, mas daqui a pouco ela não estará mais aí.

E você precisa de tempo para fazer as suas medidas.

Muito bem, você tem agora a marca M do lugar ocupado pela partícula naquêle instante.

Digamos, no instante t.

Transporte-se então até a origem O e vá de O até M, seguindo a trajetória.

Ao mesmo tempo, meça a distância que você percorre. E chame essa distância s.

s é um número algébrico.

Se ao ir de O até M você seguir o sentido positivo escolhido, s será um número positivo.

Se ao ir de O até M você fôr em sentido contrário do sentido positivo escolhido, s será um número negativo.

Vamos deixar isto bem claro. Meça comigo na Figura IV-4.

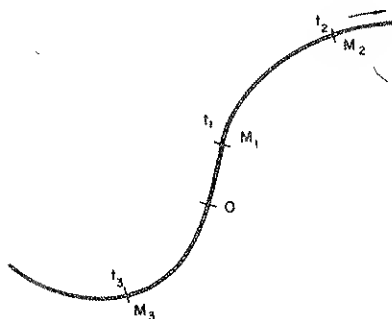



Figura IV-4

No instante t_1 a partícula coincidia com o ponto M_1 da trajetória. O arco de trajetória OM_1 mede 1,0cm, e ao ir de O até M_1 eu vou no sentido positivo. Então $s_1 = +1,0$cm. De acôrdo?

Da mesma forma no instante t_2 a partícula coincidia com o ponto M_2 e $s_2 = +3,5$cm.

E no instante t_3 a partícula coincidia com o ponto M_3, e $s_3 = -2,0$cm.

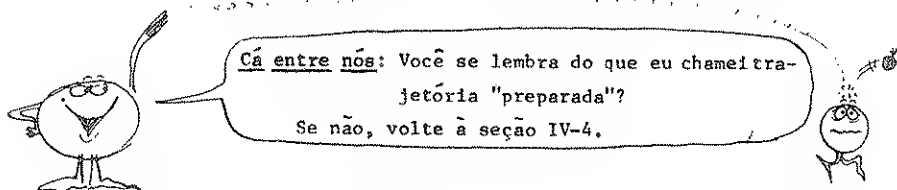
E se eu lhe dissesse que no instante t_4, $s_4 = +2,3$cm?

Bem, você percorreria 2,3cm no sentido positivo, a partir de O e ao longo da trajetória, e você me diria: "no instante t_4 a partícula estava no ponto em que eu estou agora".

De modo que há realmente uma correspondência perfeita entre a posição da partícula em determinado instante e a medida s que aprendemos a efetuar.

Se você conhece a posição, você pode determinar s.

E se você conhece s você pode determinar a posição.

Um só número é pois suficiente para determinar a posição de uma partícula em determinado instante desde que se conheça a trajetória "preparada" da partícula.

E como nêste Capítulo suporemos que isto é sempre o caso, poderemos considerar a posição s como grandeza escalar.

s será chamado posição escalar da partícula.

IV-6 Gráfico s vs t.

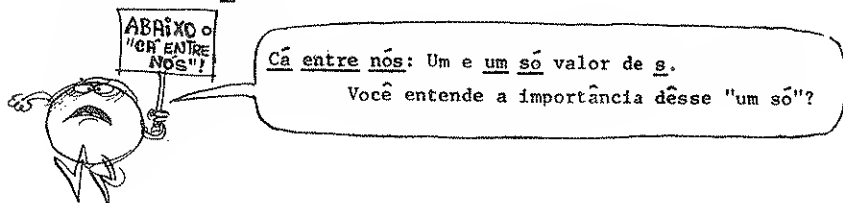
A posição escalar s varia com o tempo.

Afinal das contas essa afirmação poderia ser considerada como definição do movimento!

Diremos que s é função do tempo t e escreveremos

$$s = s(t) \tag{IV-1}$$

Leia o que precede: "s igual a s de t".

Não tem nada de misterioso nisso. A relação (IV-1) significa simplesmente que a cada valor de t dentro de determinado intervalo corresponde um e um só valor de s.

De modo que ao estudar o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória, suas medidas serão ordenadas em tabelas que serão simplesmente o conjunto dos pares (t s) obtidos experimentalmente.

E para ter uma idéia de como a posição s varia com o tempo t você lançara êsses pontos em gráfico, obtendo assim o gráfico espaço-tempo, ou s vs t, do movimento.

Vamos construir juntos um gráfico s vs t.

A Fig. IV-5 é a fotografia de um carrinho que eu utilizei para fazer algumas experiências.

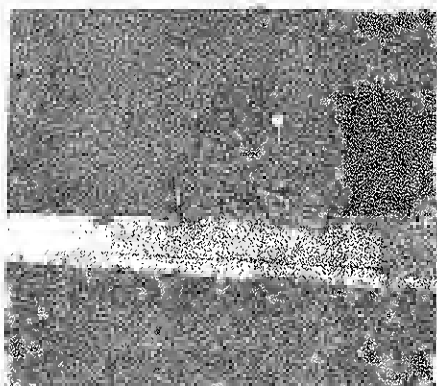



Figura IV-5

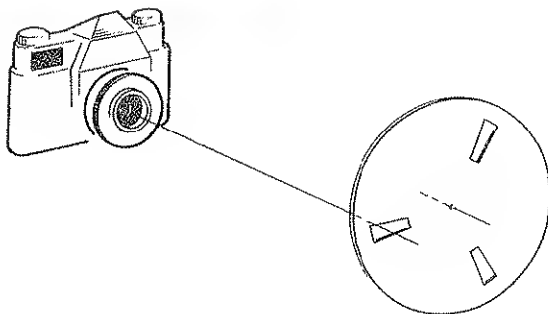



Figura IV-6

O carrinho, em forma de V invertido, desliza sôbre um colchão de ar, ao longo de uma calha de alumínio que você vê também no na fotografia.

Como também você pode ver uma haste com um pequeno disco branco, com centro prêto.

Para marcar a posição da "partícula" (entre parêntese, veja de que partícula se trata aqui!) eu utilizei um processo fotográfico.

Como mostra a Fig. IV-6, a câmera se encontra atrás de um disco que um motor elétrico (não representado) faz girar à razão de 10 voltas por segundo.

Três fendas espaçadas duas a duas de 120° foram abertas no disco, de modo que cada trigésimo de segundo, uma fenda passa na frente da objetiva. Se o obturador permanecer aberto, o filme será impressionado 30 vêzes por segundo.

Uma câmera montada assim é chamada "câmera estroboscópica (*)". Ela é de imensa utilidade para estudar movimentos no Laboratório de Física.

Muito ver, suponha que o carrinho da Fig. IV-5 corra sôbre a calha contra um fundo prêto (uma cortina), sendo êle mesmo escondido por um anteparo também prêto colocado na frente, e que deixe aparecer sòmente a haste com o disco branco (veja o esquema da Fig. IV-7).

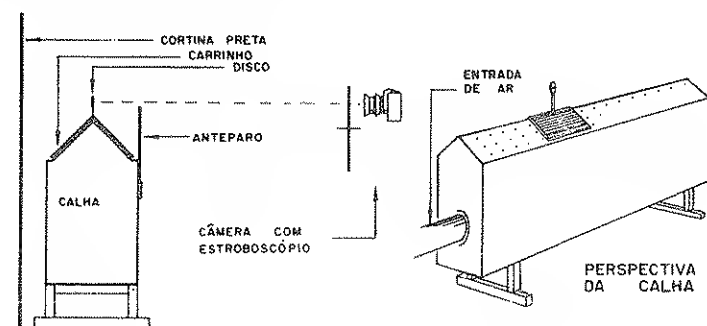



Figura IV-7

(*) O disco com as fendas é um estroboscópio. O motor utilizado é um motor de toca-discos, com uma engrenagem redutora.

O filme registrará as posições sucessivas do disco branco (e consequentemente do carrinho) a intervalos sucessivos de 1/30 s.

Na primeira experiência, e para lhe dar um exemplo de um movimento qualquer, o Martina estava puxando o carrinho por meio de uma vara comprida: ora devagar, ora mais depressa...

E depois de revelada eu obtive a fotografia reproduzida na Figura IV-8.

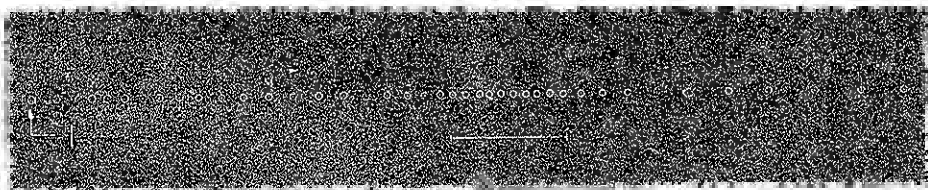



Figura IV-8

A seta indica o sentido do movimento.

"Preparemos" nossa trajetória. Como o primeiro ponto a aparecer na fotografia é o primeiro da esquerda (o ponto marcado 0), eu sòmente posso estudar o movimento a partir daquela posição do carro.

Eu não sei o que aconteceu antes.

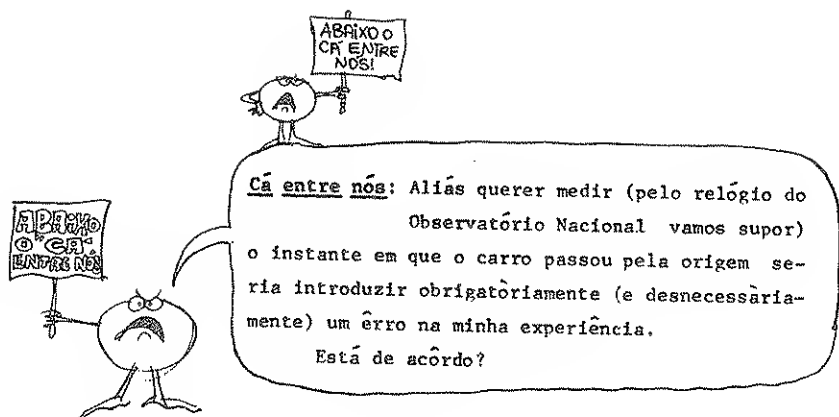
E naturalmente eu tomo o ponto 0 como origem.

O carro vai da esquerda para a direita. Então eu escolho êsse mesmo sentido como sentido positivo. (Embora, como bem frisou o Martins, essa escôlha não seja obrigatória).

Falta ainda acertar o meu relógio, isto é, escolher uma origem para os tempos.

Escolher a origem "civil" (zero hora, ou meia noite) está òbviamente excluído. Sei lá quando foi exatamente que o carro passou pela origem?

Cá entre nós: Aliás querer medir (pelo relógio do Observatório Nacional vamos supor) o instante em que o carro passou pela origem seria introduzir obrigatòriamente (e desnecessàriamente) um êrro na minha experiência.

Está de acôrdo?

De maneira que, muito naturalmente de novo, eu vou <u>definir</u> como instante zero do movimento o instante em que o carro passava pela origem.

Ao passar por 0, <u>por definição</u>, $s = 0$ e $t = 0$.

Ao fotografar o movimento do carro eu tinha deixado na frente do anteparo uma régua de 10cm.

Dessa maneira é só medir diretamente na fotografia a distância da origem a um ponto qualquer e multiplicar pelo fator de escala, para ter a posição do carro no instante em que êle deixou sua marca (o ponto em questão) no filme.

Vamos fazer isto juntos.

Determinemos primeiro o que eu chamei o fator de escala: o número pelo qual devemos multiplicar as distâncias medidas na fotografia para termos as distâncias reais. Em VG (verdadeira grandeza), se você já começou a estudar Geometria Descritiva.

A régua de 10cm mede 2,8cm na fotografia. Então o fator de escala é 10/2,8. Certo?

Veja agora o ponto marcado M na fotografia. Êle dista 5,6cm de 0.

De modo que ao passar por M a posição do carro era 10/2,8 x 5.5 = = 20cm. (+20cm aliás).

Por outro lado, M é o décimo-quinto ponto depois da origem. Entre a passagem por 0 e a passagem por M decorreu portanto um intervalo de tempo igual a 15 x 1/30 = 0,50 s.

O par associado à posição M é assim (0,50s, 20cm).

Você viu como é simples?

É só repetir a mesma operação para tôdas as marcas deixadas pelo carro.

Escolher a seguir duas escalas. As que escolhi são

$$t(s) = 1/15\ x(cm)$$

em abscissas, e s(cm) = 5y(cm) em ordenadas.

E construir o gráfico s vs t.

A Fig. IV-9 reproduz êsse gráfico.

À primeira vista, o que podemos concluir do gráfico?

Logo no início, a posição varia relativamente devagar com o tempo.

Entre 0,2s e 0,6s mais ou menos, o carrinho está andando com vontade!

Êle se acalma até 1,1s.

Para depois arrancar à tôda!

Mas isto é obviamente uma descrição meio romanceada do movimento.

Se você se contentar com aquilo, ótimo. (Depende do que você quer fazer com essas informações, não é?...)

Mas se você quiser algo mais sério, temos que passar às taxas de variação, isto é às velocidades.

IV-7 Velocidade média.

A velocidade média da partícula no intervalo $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ é por definição a taxa de variação média da partícula em função do tempo, nesse intervalo. (Volte de novo à seção III-4-3 do Capítulo III se fôr necessário).

Em t_1 a posição da partícula era s_1.

Em t_2 a posição da partícula era s_2.

Com $\Delta s \equiv s_2 - s_1$, definimos a velocidade média no intervalo $(t_1\ \ t_2)$ por:

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t}} \qquad \text{(IV-2)}$$

s(cm)
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
t(seg)
ESCALAS:

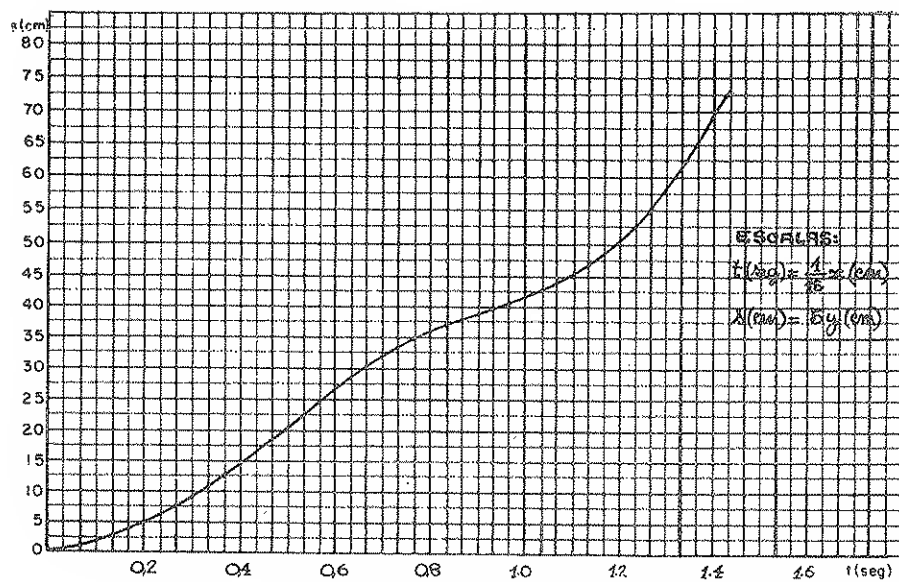



Figura IV-9

A velocidade média é proporcional ao coeficiente angular da corda definida no gráfico s vs t pelos pontos que correspondem respectivamente ao início e ao fim do intervalo.

E qual é mesmo o coeficiente de proporcionalidade?

Em que unidade se expressa uma velocidade média?

Obviamente em unidade de comprimento/unidade de tempo, ou seja em cm/s, m/s, km/s...

Calculemos juntos a velocidade média do carrinho no intervalo

(0,20s - 0,50s)

Referindo-nos de novo ao gráfico da Fig. IV-9 observamos que

em t = 0,20s   s = 5,0cm

em t = 0,50s   s = 20cm

Concluímos que no intervalo dado

$$\langle v \rangle = \frac{20 - 5,0}{0,50 - 0,20} = 50 \text{cm/s}$$

Qual é a velocidade média no intervalo (0 - 0,6s)?

No intervalo (0,70s - 1,3s)?

No intervalo (0,30s - 1,0s)?

Observe bem, para evitar êrros, que Δs representa a variação na posição da partícula, e não o que o leigo chama de "distância percorrida".

Vamos por exemplo a um outro gráfico s vs t: o da Fig. IV-10.

Observe primeiro que nesse gráfico a origem das posições não coincide com a origem dos tempos. Isso acontece. Alguém me disse: em t = 0, a posição da partícula era +20m. Em t = 1,0s ela era +24m, etc... Muito bem; a partir dêsses dados eu construí o gráfico.

Você observa que até $t = 3,5s$, $\underline{s}$ é positivo e aumenta. Isto significa que a partícula estava se afastando da origem, no sentido positivo.

Em $t = 3,5s$, a posição da partícula era +29m e a partir dêsse instante $\underline{s}$ decresce até $t = 10,3s$. Você conclui que em (3,5s, 29m) a partícula deu meia-volta e começou a aproximar-se da origem, indo no sentido negativo da trajetória.

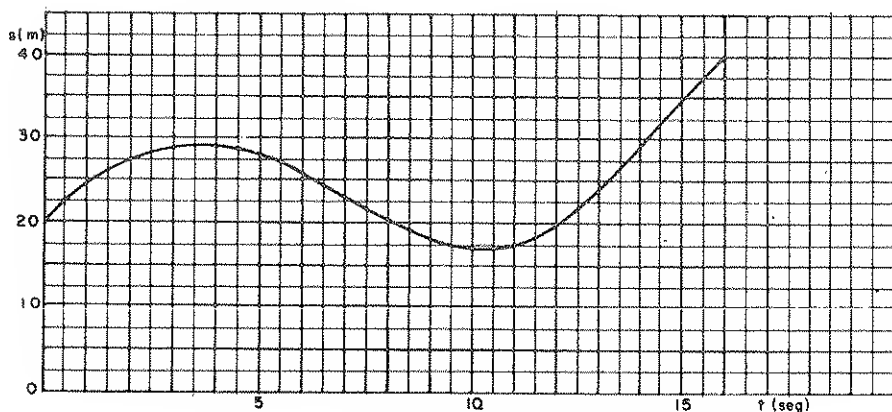
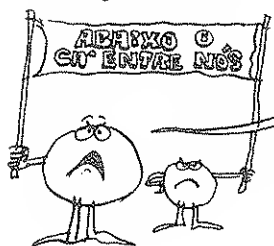



Figura IV-10

Qual foi a velocidade média no intervalo (0 - 3,5s)?

Foi <v> = 29-20/3,5-0 = 2,6m/s.

Agora preste atenção. Qual foi a velocidade média no intervalo (0 - 8,20)?

Em t = 8,2s, a posição da partícula era +20m (verifique!). Então naquêle intervalo <v> = 20-20/8,2-0 = 0.

No intervalo (0 - 8,2s) a velocidade média foi nula.

No entanto, ao falar de espaço percorrido, você diria que a partícula percorreu 9 metros até dar meia volta, mais 9 metros de novo até voltar ao ponto em que estava no instante zero. Ao todo 18 metros. Em 8,2 segundos. E a velocidade média seria...

Mais não é não!

Por definição, eu repito, Δs representa a variação da posição da partícula.

E uma vez aceitas as definições, temos que aguentar as consequências.

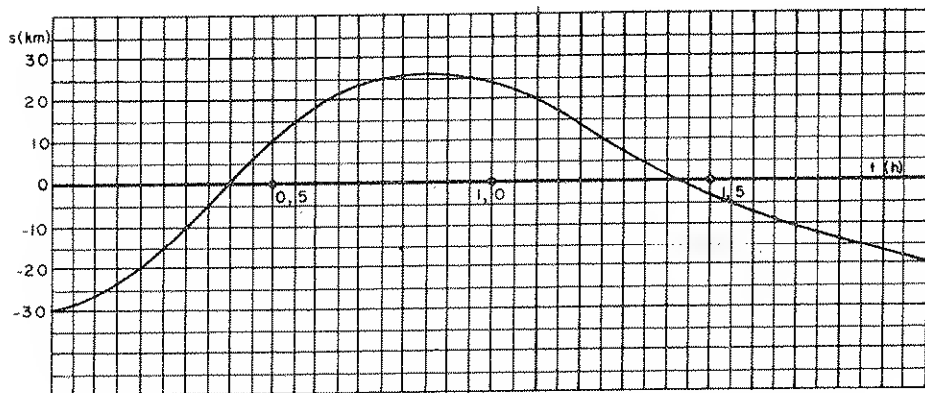



Figura IV-11

A Fig. IV-11 mostra mais outro gráfico <u>s</u> vs <u>t</u>.

O gráfico do movimento de um automóvel numa estrada.

Para que você se acostume aos poucos com tôdas as escôlhas possíveis de origens, eu escolhi propositadamente a origem dos tempos no instante em que o automóvel passava pelo marco -30km.

Em que instante o automóvel passou pela origem? Em t = 0,40h (ou seja, 24 minutos).

Qual foi a velocidade média no intervalo (0 - 0,40h)?

Foi <v> = 0-(-30)/0,40-0 = 75 km/h.

Em que instante o automóvel deu meia volta?

Em t = 0,85h, não é mesmo?

E qual era a posição do automóvel naquêle instante?

Era +26 km.

Qual foi a velocidade média no intervalo (0 - 0,85h)?

Foi <v> = 26-(-30)/0,85-0 = 66 km/h.

E qual foi a velocidade média no intervalo (1,1h - 2,0h)?

Vamos! Faça o cálculo. Lembre-se que Δs representa a posição final menos a posição inicial.

Quanto foi que você achou? -44,5 km/h? Ótimo! A velocidade média no intervalo (1,1h - 2,0h) é negativa.

Isto não é de estranhar. O automóvel não andou sempre no sentido negativo, naquêle intervalo?

Mas isto não é realmente necessário para que a velocidade média seja negativa.

Basta que a posição final tenha uma medida algébrica menor que a posição inicial.

Por exemplo, qual foi a velocidade média no intervalo (0,40h-2,0h)?

Qual é o interêsse objetivo de conhecer a velocidade média de uma partícula em determinado intervalo?

Eu poderia dizer-lhe que se você conhece a velocidade média você pode calcular de quanto variou a posição da partícula durante o intervalo considerado.

Maa talvez não ajude muito a se representar de que maneira varia a posição.

Veja por exemplo os gráficoa $\underline{s}$ vs $\underline{t}$ da Fig. IV-12 para duaa partículas.

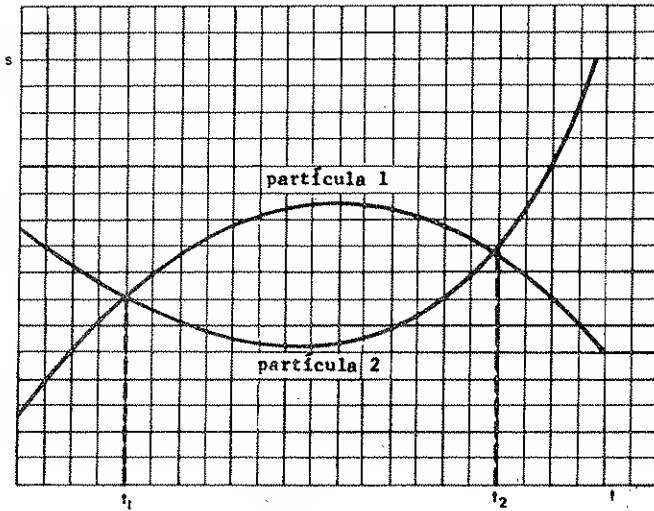



Figura IV-12

No intervalo (t_1 t_2) a velocidade média das duas partículas é a mesma.

No entanto as posições variam, nêsse intervalo, de modo muito diferente.

Na realidade, a velocidade média é sôbre tudo o meio natural e necessário para chegar à velocidade instantânea.

IV-8 Velocidade instantânea - Gráfico v vs t.

A velocidade média no intervalo (t_1,t_2) é $\langle v\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ com $\Delta s \equiv s_2-s_1$ e $\Delta t \equiv t_2-t_1$.

Se o ponto M no gráfico s vs t corresponde ao instante t_1, e o ponto P ao instante t_2, $\langle v\rangle$ é proporcional ao coeficiente angular da corda MP (Fig. IV-13).

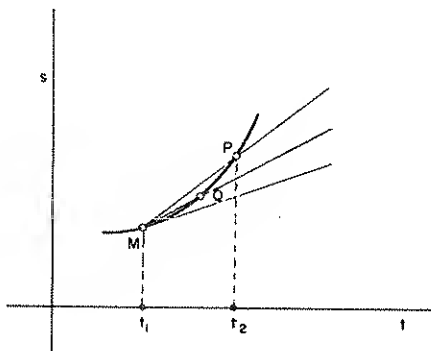



Figura IV-13

Suponha agora que M permanece fixo e que você calcule velocidades médias em intervalos de tempo cada vez mais reduzidos, mas que começam sempre em t_1.

As velocidades médias que você vai calcular serão proporcionais aos coeficientes angulares das cordas MP, MQ...MM.

No limite, quando o intervalo $\Delta t \equiv t_2-t_1$ fôr muito pequeno, a sua velocidade média será proporcional ao coeficiente angular da tangente em M ao gráfico s vs t.

E você chamará essa velocidade limite de velocidade escalar instantânea no instante t_1. A velocidade instantânea é a taxa de variação instantânea da posição da partícula em função do tempo.

Escreveremos

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \{\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}\} = \frac{ds}{dt} \qquad \text{(IV-3)}$$

O que precede é mera recordação do que aprendemos na seção III-4-4 do Capítulo III.

Mas vamos agora da teoria à prática.

Eu passei o gráfico s vs t da Fig. IV-9 para uma fôlha de papel transparente, tracei as tangentes pelo método do espelho nos pontos correspondentes aos instantes

$$\frac{1}{15}\text{ s} \qquad \frac{2}{15}\text{ s} \qquad \frac{3}{15}\text{ s}, \ldots,$$

e medi mais os coeficientes angulares.

O fator de proporcionalidade é

$$\frac{5}{(1/15)\ \frac{\text{s}}{\text{cm}}} = 75 \text{ cm/s}$$

A tabela que eu armei foi:

Tabela IV-1

t ($\frac{1}{15}$ s)	Coeficiente angular	v (cm/s)
0	0,21	16,0
1	0,28	21,0
2	0,37	27,8
3	0,48	36,0
4	0,58	43,5
5	0,67	50,0
6	0,73	54,6
7	0,80	60,0
8	0,85	63,7
9	0,86	64,5
10	0,67	50,0
11	0,52	39,0
12	0,52	31,4
13	0,38	28,4
14	0,35	26,2
15	0,37	27,8
16	0,50	37,5
17	0,63	47,2
18	0,92	69,0
19	1,18	88,4
20	1,36	102
21	1,53	115
22	1,65	124

v (cm/seg)
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
t (seg)
A
B

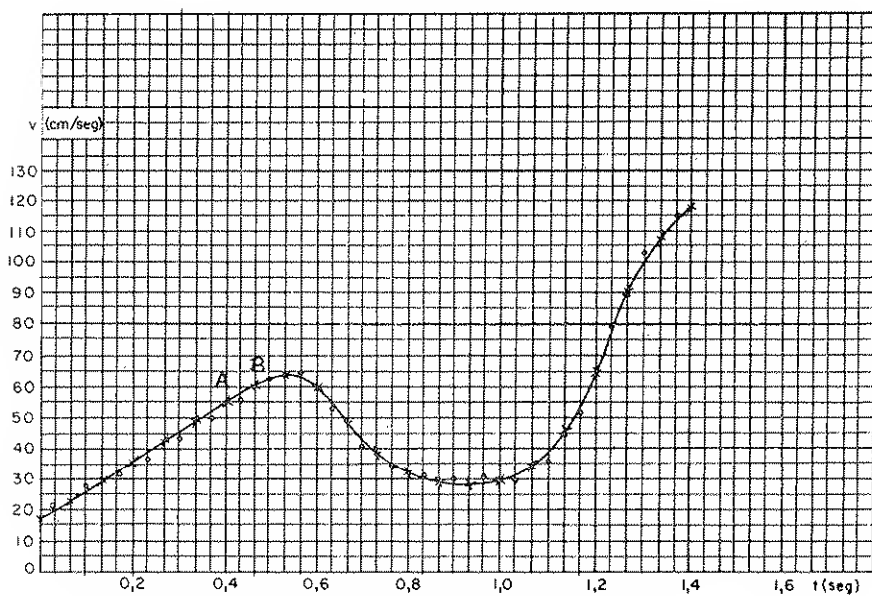



Figura IV-14

O gráfico é o da Fig. IV-14

E a propósito, só para você não esquecer, quais são as escalas que eu utilizei nêsse gráfico?

Observe que o que você tem no livro é uma reprodução fotográfica, reduzida, do gráfico que eu construí.

Cada quadrado do papel do gráfico tinha um centímetro de lado, embora não o tenha na reprodução.

Nêsse gráfico, há cruzes e há círculos.

As cruzes são as imagens dos pares da Tabela IV-1.

E os círculos?

Os círculos representam as velocidades médias nos intervalos sucessivos (0 - 1/15s), (1/15s - 2/15s), (2/15s - 3/15s)...

Essas velocidades médias foram medidas a partir da fotografia da Figura IV-8. Como?

Você observa que a curva das velocidades médias segue de muito perto a curva das velocidades instantâneas.

Qual foi a razão que me levou a lançar as velocidades médias no gráfico da Fig. IV-14?

Para começar, observe que os pontos representativos das velocidades médias devem ficar muito próximos da curva das velocidades instantâneas. Por quê?

Se você fêz os problemas III-12, III-13 e III-14 do Capítulo III, você deve conhecer a resposta.

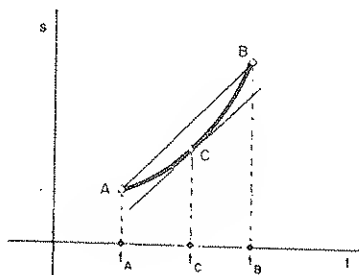



Figura IV-15

Mas em todo caso a Fig. IV-15 vai lhe explicar de novo.

Veja o arco AB de um gráfico s vs t.

No intervalo (t_A,t_B) a velocidade média é proporcional ao coeficiente angular da corda AB.

Agora, você poderá traçar uma tangente ao arco AB paralela à corda AB?

Obviamente sim. Experimente com qualquer arco AB.

Você encontrará, sempre, pelo menos um ponto C do arco AB em que a tangente é paralela à corda AB.

Mas dizer que a tangente em C é paralela à corda AB é dizer que a velocidade instantânea no instante t_C é igual à velocidade média no intervalo (t_A t_B).

Volte então ao gráfico v vs t da Fig. IV-14 e considere dois instantes quaisquer diferindo de 1/15s.

Por exemplo t = 6/15s e t = 7/15s.

Os pontos correspondentes do gráfico são A e B.

O raciocínio que acabamos de fazer mostra que a velocidade média no intervalo (6/15s 7/15s) é igual à velocidade em um instante (desconhecido) dêsse intervalo.

Eu disse instante desconhecido.

Mas se o arco AB do gráfico s vs t não tiver nada de extraordinário, se fôr um arco honesto, o instante em que a velocidade instantânea é igual à velocidade média está na vizinhança do meio do intervalo.

Volte a fazer algumas construções similares à da Fig.IV-15 para se convencer disto.

Eis porque, ao lançar os pontos representativos das velocidades médias, e como eu não sabia, à priori, em que instante do intervalo êles iam coincidir com o ponto representativo de uma velocidade instantânea, eu escolhi o meio do intervalo.

Observe atentamente a Fig. IV-14. Confere?

E eis porque eu disse que êsse pontos devem estar muito próximos da curva das velocidades instantâneas.

E de fato estão.

Pelo menos a maior parte dêles.

v (cm/seg)
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
t(seg)

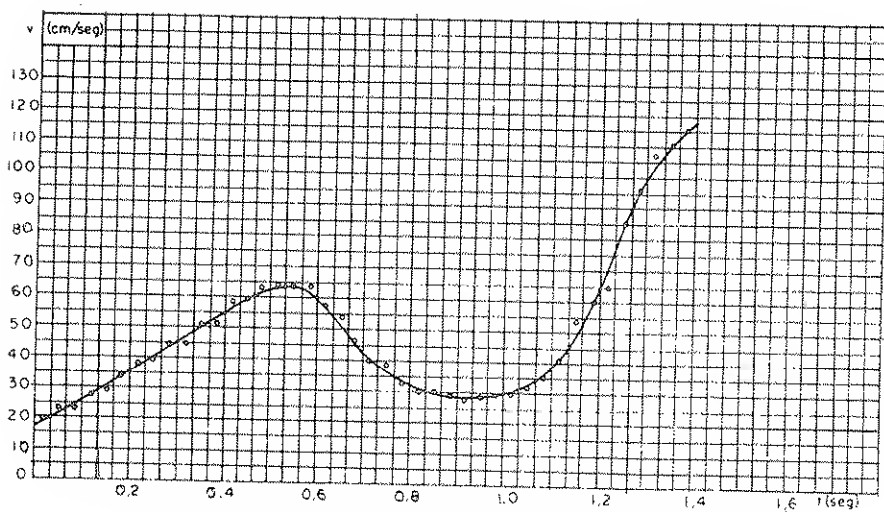



Figura IV-16

Eu poderia talvez melhorar um pouco.

Em vez de calcular as velocidadea médias sôbre intervalos de 1/15s, eu poderia calculá-las sôbre intervalos de 1/30a.

É só, na Fig. IV-8, medir as diatâncias entre pontos consecutivos (em vez de fazê-lo de dois em dois), e multiplicar por...

Eu obtive assim o gráfico da Fig. IV-16.

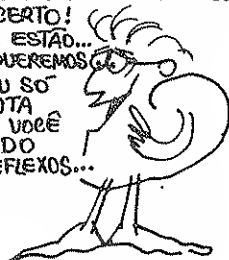
Compare agora oa dois gráficoa v vs t.

O da Fig. IV-14 foi obtido a partir do gráfico a va t, medindo os coeficientes angulares daa tangentea.

O da Fig. IV-16 foi obtido diretamente a partir da fotografia da Figura IV-8, medindo velocidades médias em intervalos consecutivos de 1/30s.

Os dois gráficos são muito parecidos.

Mas não são idênticos.

Qual doa dois está certo? Como?

Mas eu acho que podemos concordar no seguinte: o gráfico da Figura IV-16 é provàvelmente mais preciso do que o da Figura IV-14.

Eu não vou lhe dar minhas razões. Eu gostaria que você pensasse no assunto e o discutisse em aula com seu Professor.

O movimento que estudamos - o do carrinho - é um pouco particular: o móvel anda sempre no mesmo sentido.

O sentido que escolhemos como sentido positivo.

Em qualquer intervalo de tempo Δs é positivo.

Tôdas as velocidades médias são positivas.

E naturalmente tôdas as velocidades instantâneas também.

As curvas v vs t das Fig. IV-14 ou IV-16 estão situadas em totalidade acima do eixo dos tempos (porque orientamos positivamente o eixo dos v para cima, claro).

Mas olhe o gráfico s vs t da Fig. IV-17.

Êle passa por um máximo em A, por um mínimo em B.

A curva s vs t está assim dividida em três arcos: OA, AB, BC.

No intervalo (0, t_A) correspondente ao arco OA, s cresce. Em consequência todos os Δs são positivos, tôdas as velocidades instantâneas também.

Como você verifica no gráfico v vs t que eu construí imediatamente abaixo do gráfico s vs t.

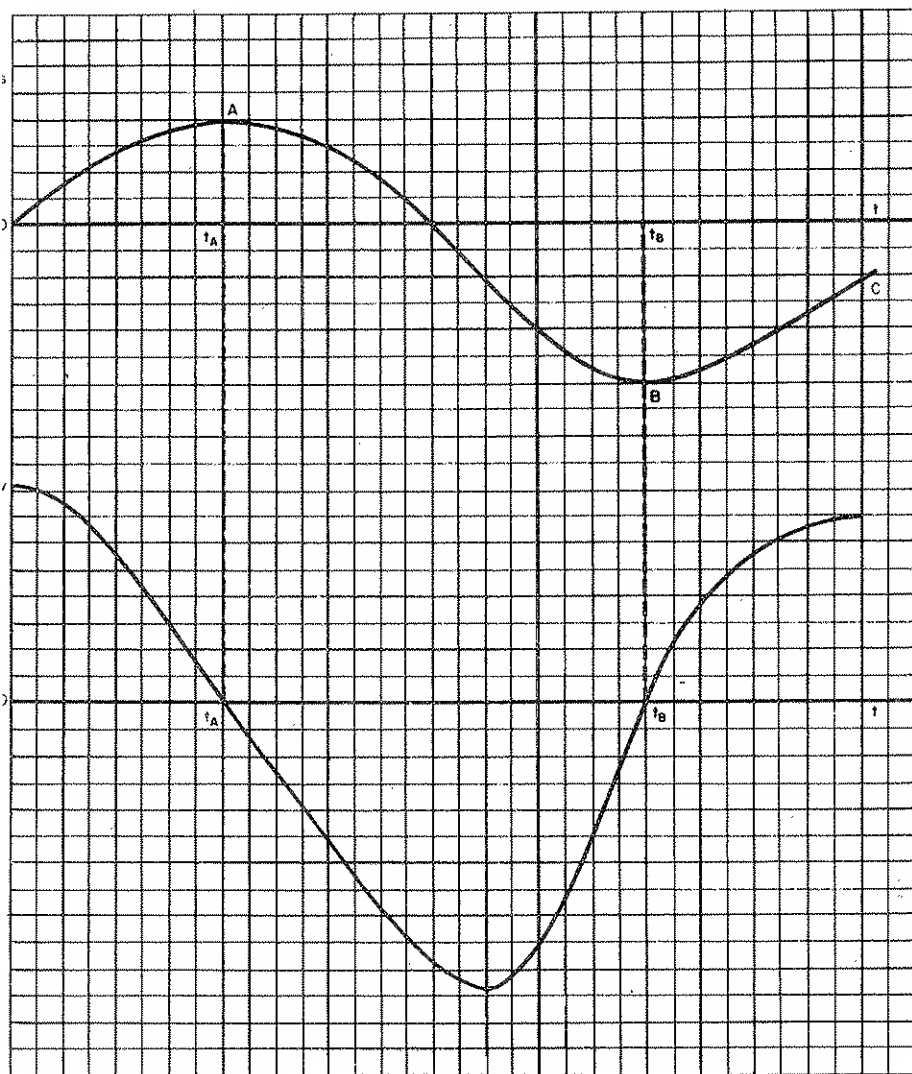



Figura IV-17

A propósito, a curva s vs t representada na Fig. IV-17 não corresponde a nenhuma experiência. É uma curva que eu "inventei". Mas que poderia perfeitamente ser encontrada em situação experimental.

No entanto, a partir daquela curva s vs t, eu medi escrupulosamente coeficientes angulares de tangentes para construir o gráfico v vs t.

Com escalas arbitrárias òbviamente, do momento que eu não indiquei nenhuma escala para o gráfico s vs t.

No instante t_A, s passa por um máximo.

A tangente ao gráfico s vs t é horizontal.

A velocidade instantânea é nula (verifique no gráfico v vs t!) Nêsse instante a partícula dá meia-volta.

O arco AB do gráfico s vs t corresponde ao intervalo (t_A t_B).

Nêsse intervalo s decresce. Isto significa que a partícula está agora andando no sentido negativo da trajetória.

Todos os Δs são negativos. Tôdas as velocidades instantâneas também.

O arco correspondente do gráfico v vs t está situado abaixo do eixo dos t.

No instante t_B, outra meia-volta da partícula. Ela deixa de andar no sentido negativo para voltar a andar no sentido positivo.

Em t_B a velocidade se anula de novo.

A partir do instante t_B, s volta a crescer.

As velocidades são de novo positivas.

IV-9 O que o gráfico v vs t pode dizer a respeito da posição.

IV-9-1 Caso em que a velocidade é constante.

O gráfico v vs t é utilíssimo em Cinemática.

Vamos ver juntos por quê.

Concordamos que é preferível construir o gráfico v vs t diretamente a partir do registro das posições da partícula, em vez de construir primeiro o gráfico s vs t para deduzir dêle o gráfico v vs t.

Eu quero mostrar-lhe que, se quiséssemos, poderíamos construir o gráfico s vs t a partir do gráfico v vs t!

Você leu bem. Vamos fazer a passagem inversa. Da velocidade para a posição.

Comecemos pelo caso mais simples: o gráfico v vs t (construído a partir das velocidades médias!) é uma reta paralela ao eixo dos t, como na Figura IV-18.

Isso significa que no intervalo considerado (t_1 t_2) a velocidade da partícula era constante.

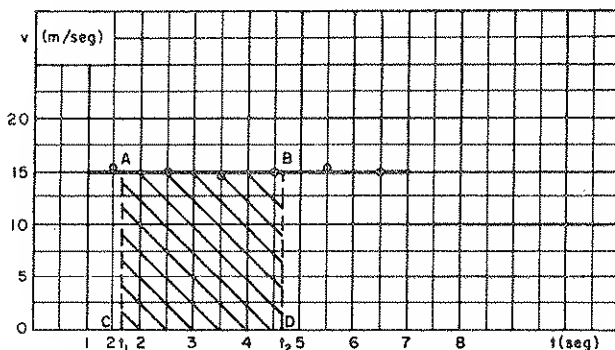



Figura IV-18

No caso da Fig. IV-18 a velocidade conservou-se igual a 15m/s no

intervalo (1,0s - 7,0s).

Mas que velocidade? Nêste caso tanto faz. Ambas. A velocidade instantânea e a velocidade média conservaram-se constantes, iguais a 15m/s, no intervalo (1,0s - 7,0s).

De modo que <v> = 15m/s em qualquer intervalo contido dentro daquêle.

Por exemplo <v> = 15m/s no intervalo (1,0s - 2,0s).

No intervalo (1,0s - 3,0s).

No intervalo (1,0s - 4,0s)...

Mas como por definição $<v> \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t}$, podemos afirmar que:

- no intervalo (1,0s - 2,0s), $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 15m/s$, de modo que nêsse intervalo a posição da partícula <u>variou</u> de $\Delta s = 15m/s \times 1{,}0s = 15m$.

  Ou ainda que $s_2 - s_1 = 15m$.

- no intervalo (1,0s - 3,0s), $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 15m/s$, de modo que nêsse intervalo a posição da partícula <u>variou</u> de $\Delta s = 15m/s \times 2{,}0s = 30m$.

  Ou ainda que $s_3 - s_1 = 30m$.

E no intervalo (1,0s - 4,3s) de quanto variou <u>s</u>?

Variou de $\Delta s = 15m/s \times 3{,}3s = 49{,}5m$.

Se quisermos, podemos representar por <u>t</u> o final do intervalo, sendo entendido que <u>t</u> pertence ao intervalo (1,0s - 7,0s).

De quanto variou a posição da partícula no intervalo (1,0s - ts)?

Variou de $\Delta s = 15(t - 1{,}0)m$.

E finalmente, pode acontecer que eu queira calcular a variação da posição da partícula em um intervalo <u>qualquer</u> (t_1 t_2) pertencente ao intervalo (1,0s - 7,0s).

Eu escreverei $\Delta s = 15(t_2 - t_1)m$ (IV-4)

Está de acôrdo?

Voltemos então à Fig. IV-18. Eu indiquei no eixo dos tempos dois instantes quaisquer t_1 e t_2.

Olhe para o retângulo sombreado ABCD.

A altura do retângulo é proporcional a 15m/s.

Eu quero dizer que a altura é realmente 3,0cm, mas como a escala vertical é v(m/s) = 5y(cm), então a altura é $(\frac{1}{5}\ cm.s/m) \times (\frac{15m}{s})$. Sempre nossas escalas, lembra?

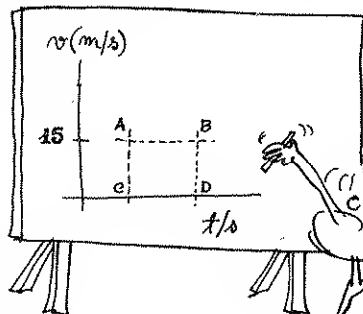
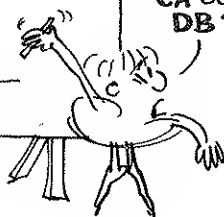
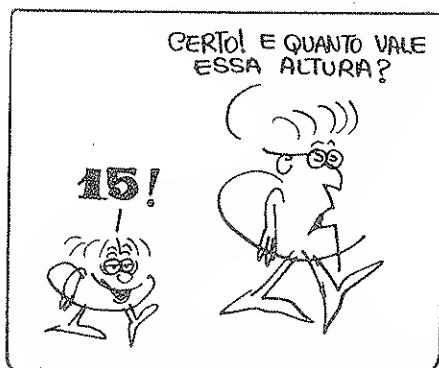
CERTO! E QUANTO VALE ESSA ALTURA?
15!

15 QUÊ?

DESCULPA! O 15 DO EIXO VERTICAL REPRESENTA METROS POR SEGUNDO...
E CONSEQUENTEMENTE NÃO PODE MEDIR UMA ALTURA, CERTO?

E O QUE TEM QUE FAZER PARA TRANSFORMAR ÊSSES 15 m/s EM CENTÍMETROS? NOS CENTÍMETROS QUE MEDEM REALMENTE A ALTURA "CA"?

JÁ SEI! 1 CENTÍMETRO REPRESENTA 5 m/s. ENTÃO 1 m/s É REPRESENTADO POR $\frac{1}{5}$ cm. E 15 m/s por
15 m/s $\frac{1 \text{ cm}}{5 \text{ m/s}}$!!

ÓTIMO! E ISTO É EXATAMENTE O QUE EU TINHA ESCRITO QUANDO VOCÊ ME INTERROMPEU...
SSSSSs

Da mesma forma, a base do retângulo é proporcional a $(t_2 - t_1)$. Mais precisamente, base = 1cm/s x $(t_2 - t_1)$s.

Segue que a <u>área</u> do retângulo é proporcional ao produto $15(t_2 - t_1)$, ou ainda a Δs. Façamos o cálculo juntos:

$$\text{área ABCD} = \text{base} \times \text{altura} = \{1\text{cm/s} \times (t_2 - t_1)\text{s}\} \times \{\frac{1}{5}\,\text{cm.s/m} \times 15\text{m/s}\}$$

$$= \{1\text{cm/s} \times 1/5\ \text{cm.s/m}\} \times \{15\text{m/s} \times (t_2 - t_1)\text{s}\}$$

Observe que o segundo colchete é Δs.

Segue que:

$$\text{área ABCD} = \{1\text{cm/s} \times 1/5\ \text{cm.s/m}\}\ \Delta s$$

O que fornece, explicitando Δs:

$$\Delta s = \{1\text{s/cm} \times 5\text{m/cm.s}\} \times \{\text{área ABCD}\} \qquad \text{(IV-5)}$$

Conclusão: a variação da posição da partícula no intervalo $(t_1\ t_2)$ é proporcional à área do retângulo limitado pela reta v = 15m/s, pelo eixo dos <u>t</u> e pelas verticais $t = t_1$ e $t = t_2$.

O coeficiente de proporcionalidade é o <u>produto</u> dos coeficientes das duas escalas.

Não é mesmo um resultado interessante?

Vamos então ao caso geral. (Fig. IV-19).

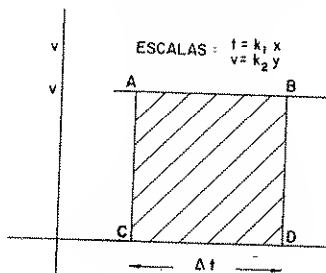



Figura IV-19

A velocidade constante é $\underline{v}$. As escalas utilizadas no gráfico são $t = k_1 x$ $v = k_2 y$ o que significa que $\Delta t = k_1 \Delta x$. De modo que:

$$\Delta s \ (= v \ \Delta t) = (k_2 y) . (k_1 \Delta x)$$

$$\Delta s = k_1 k_2 (y \Delta x) \qquad \text{(IV-6)}$$

Mas $(y\Delta x)$ é a área do retângulo ABCD.

De modo que:

$$\boxed{\Delta s = k_1 k_2 \ . \ (\text{área ABCD})} \qquad \text{(IV-7)}$$

É exatamente o resultado enunciado acima.

Há talvez um detalhe que merece um pouco de atenção: E se $\underline{v}$ fôr negativo?

Se $\underline{v}$ fôr negativo, o $\underline{y}$ correspondente do gráfico será também negativo.

E como Δx é sempre positivo do momento que Δt é sempre positivo, então o produto $y\Delta x$ é negativo.

Tudo ótimo. Pois fìsicamente, sendo $\underline{v}$ negativo a partícula vai no sentido negativo da trajetória, todos os Δs são negativos.

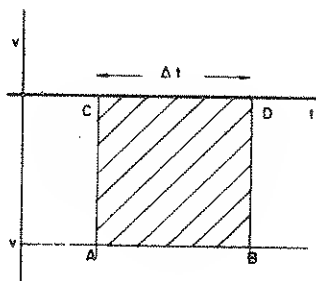



Figura IV-20

Mas dissemos que $(y\Delta x)$ representa a área do retângulo ABCD. Uma área pode ser negativa? Porque não? Basta <u>definir</u> como negativas as áreas situadas abaixo do eixo dos $\underline{t}$.

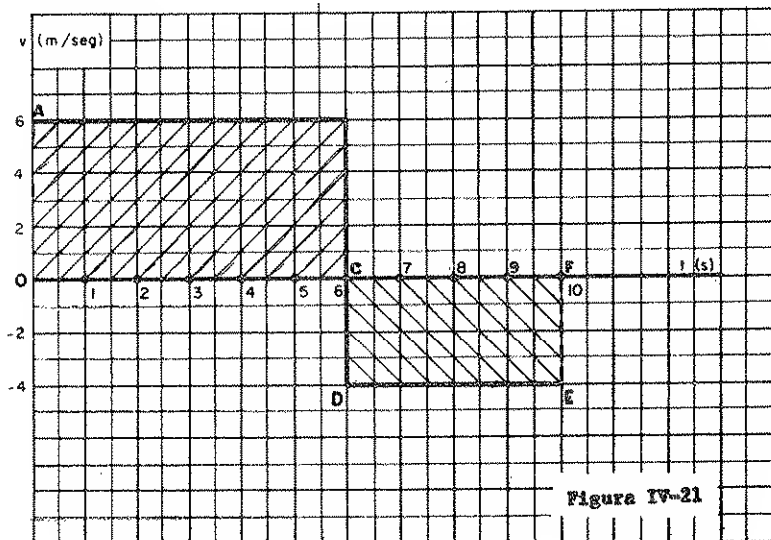
Na Fig. IV-20 a velocidade da partícula no intervalo Δt é negativa.

E por definição a área sombreada ABCD é negativa.

Compliquemos mais um pouquinho.

Inventemos o movimento de uma partícula em que ela anda com velocidade constante (no sentido positivo por exemplo) e de repente, dá meia-volta e adquire instantâneamente uma velocidade constante em sentido contrário.

O gráfico v vs t poderia ser o da Fig. IV-21.

Figura IV-21

Problema: de quanto variou a posição da partícula entre os instantes 0 e 10s?

No intervalo (0 - 6,0s): $\Delta s = +36m$.

No intervalo (6,0s - 10s): $\Delta s = -16m$.

Ao todo no intervalo (0 - 10s): $\Delta s = +20m$.

Você fêz os cálculos junto comigo? Ótimo.

De modo que agora aprendemos você e eu a calcular a variação da posição de uma partícula cuja velocidade é constante, a partir do gráfico _v_ vs _t_.

Calculando áreas e multiplicando pelo produto dos fatores de escalas.

Veja, eu insisto sôbre a expressão _variação da posição_. No caso precedente por exemplo (Fig. IV-21), a _única_ coisa que eu posso aprender do gráfico _v_ vs _t_ é que a posição da partícula em $t = 10s$ é medida pelo valor que ela tinha em $t = 0$ _aumentado de 20m_.

Pois se $\Delta s = +20m$ no intervalo (0 - 10s)!

Mas se ninguém me diz onde estava a partícula em $t = 0$, eu não posso saber onde ela estará em $t = 10s$.

Eu escrevo então $s_{10} = s_o + 20m$.

E eu aguardo que uma alma caridosa me diga quanto vale s_o.

No caso geral, sendo _v_ a velocidade constante da partícula em determinado intervalo:

$$\boxed{\Delta s = v\Delta t} \qquad \text{(IV-8)}$$

Tomemos como origem dos tempos ($t = 0$) o início do intervalo, e seja _t_ um instante qualquer do intervalo.

s_o e _s_ são as posições correspondentes.

A equação (IV-8) se escreve $s - s_o = v(t - t_o)$, ou:

$$\boxed{s = s_o + vt} \qquad \text{(IV-9)}$$

Concluímos que, no intervalo considerado, _s_ é uma função linear do tempo.

De modo que o gráfico _s_ vs _t_ é um segmento de reta.

O que você não deve estranhar muito se você se recorda do que apren

demos na seção III-4-1 do Capítulo III.

A Fig. IV-22 mostra um gráfico v vs t com v constante e positivo (à esquerda) e outro com v constante e negativo (à direita).

Alguns dos gráficos s vs t possíveis são representados embaixo de cada um dêles.

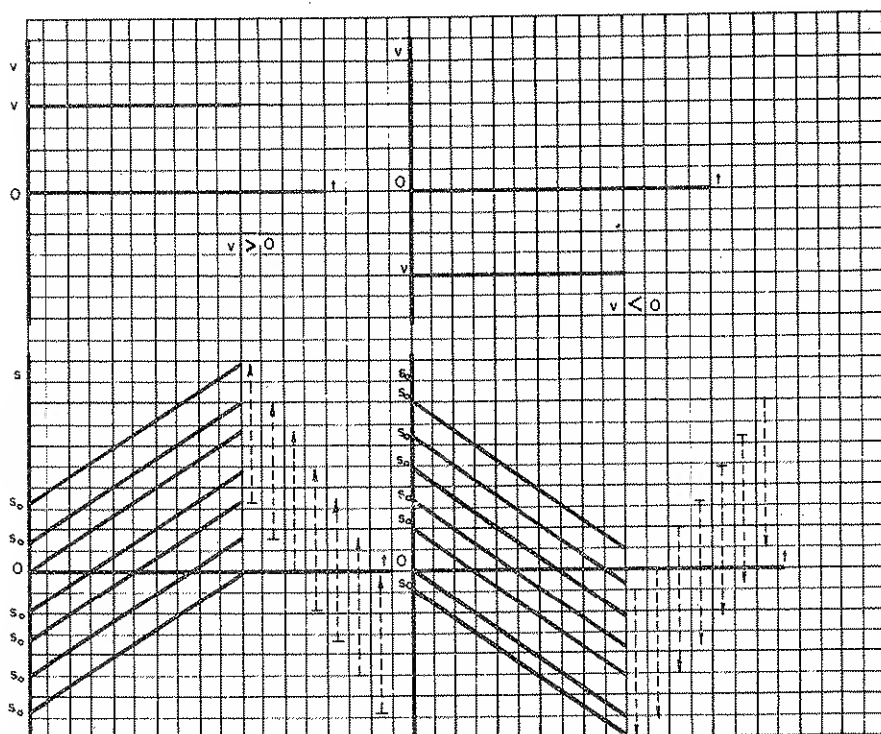



Figura IV-22

Em cada série tôdas as retas s vs t são paralelas.

Pois tôdas têm o mesmo coeficiente angular, proporcional a v.

Em um dado instante, todos os Δs correspondentes a tôdas as retas de uma mesma série são iguais (tomando a mesma origem dos tempos em cada caso, claro).

Eu representei por setas tracejadas os Δs totais. Isto é, os Δs correspondentes ao intervalo todo em que v é constante.

Tôdas as setas do grupo da esquerda apontam para cima (Δs > 0), e tôdas têm o mesmo comprimento.

Tôdas as setas do grupo da direita apontam para baixo (Δs < 0), e tôdas têm o mesmo comprimento.

E mais uma vez para terminar: você não pode escolher nenhuma da infinidade de retas possíveis em qualquer um dos grupos, a não ser que alguém lhe diga quanto vale s_o.

IV-9-2 A velocidade é qualquer.

Aprendemos na seção precedente que se a velocidade de uma partícula fôr constante, a variação Δs da posição da partícula durante um intervalo de tempo Δt é proporcional à área limitada pela reta v vs t, o eixo dos tempos e as ordenadas que limitam o intervalo Δt.

Desde que se contem como positivas as áreas acima do eixo dos tempos, ou para sermos mais precisos, as áreas situadas do lado dos v positivos; e como negativas as áreas situadas do lado oposto.

Essa propriedade é geral.

Qualquer que seja o modo com que a velocidade varía com o tempo a variação Δs da posição da partícula durante um intervalo de tempo Δt é proporcional à área limitada pela curva v vs t etc...

Eu estou muito tentado de deixar as coisas assim mesmo, pedindo qua você me acredite sob palavra.

Mas afinal das contas nós estamos conversando para que você aprenda também certos hábitos e certos tipos de raciocínio.

O que serve de base à demonstração que vamos fazer agora é um doa mais importantes em Matemática e em Física.

Em um intervalo (t_1 t_2) uma partícula tem uma velocidade sempre crescente (ou sempre decrescente; o raciocínio é análogo). Como na Fig. IV-23.

No início do intervalo a velocidade é v_1. No fim ela é v_2.

Imagine agora que uma partícula (1) tenha durante o intervalo (t_1 t_2) a velocidade constante v_1 (Fig. IV-23-a).

Enquanto a posição da nossa partícula varia de Δs (desconhecido), a posição da partícula (1) varia de Δs_1 proporcional à área do retângulo CEFD.

Pois é isso mesmo que acabamos de aprender na seção precedente.

E imaginemos que uma outra partícula (2) tenha durante o intervalo (t_1 t_2) a velocidade constante v_2.

Enquanto a posição da nossa partícula varia de Δs, a posição da partícula (2) varia de Δs_2 proporcional à área do retângulo CABD.

Ora durante o intervalo todo a velocidade da nossa partícula foi sempre maior que a velocidade v_1 da partícula (1).

O que nos permite afirmar que $\Delta s_1 < \Delta s$.

E por sua vez a velocidade da nossa partícula foi sempre menor que a da partícula (2).

O que nos permite afirmar que $\Delta s < \Delta s_2$.

Ou ainda, que

$$\Delta s_1 < \Delta s < \Delta s_2$$

A incerteza sôbre Δs é igual à diferença $\Delta s_2 - \Delta s_1$.

E essa diferença é proporcional a: (área CABD - área CEFD).

A incerteza sôbre Δs é proporcional à área sombreada da Fig. IV-23-a.

Reduzir essa faixa de incerteza é muito fácil.

Basta dividir em dois o intervalo Δt, e impor à partícula (1) uma velocidade "em dois degraus" EHIF (Fig. IV-23-b).

Δs_1 será proporcional à área CEHIFD, e sempre menor que nosso Δs do momento que a velocidade da partícula (1) continua sendo menor que a velocidade da nossa partícula.

Imporemos à partícula (2) uma velocidade também "em dois degraus" AIGB.

Δs_2 será proporcional à área CAIGBD, e sempre maior que nosso Δs.

Teremos de novo.

$$\Delta s_1 < \Delta s < \Delta s_2$$

Mas você observa fàcilmente que a faixa de incerteza sôbre Δs, sempre igual à diferença entre Δs_2 e Δs_1 e consequentemente proporcional à área sombreada da Fig. IV-23-b, é bem menor que a precedente.

v
A
B
(a)
E
F
C
t_1
t_2
D
t
G
B
A
I
F
(b)
E
H
C
t_1
t_2
D
t
(c)
t_1
t_2
t
(d)
t_1
t_2
t
(e)
t_1
t_2
t
BRRR
BRRRR...
BRRRR...
BRRRR
BRRRR...
BRRRR
BRRRR...
BRRR
BRRRR...

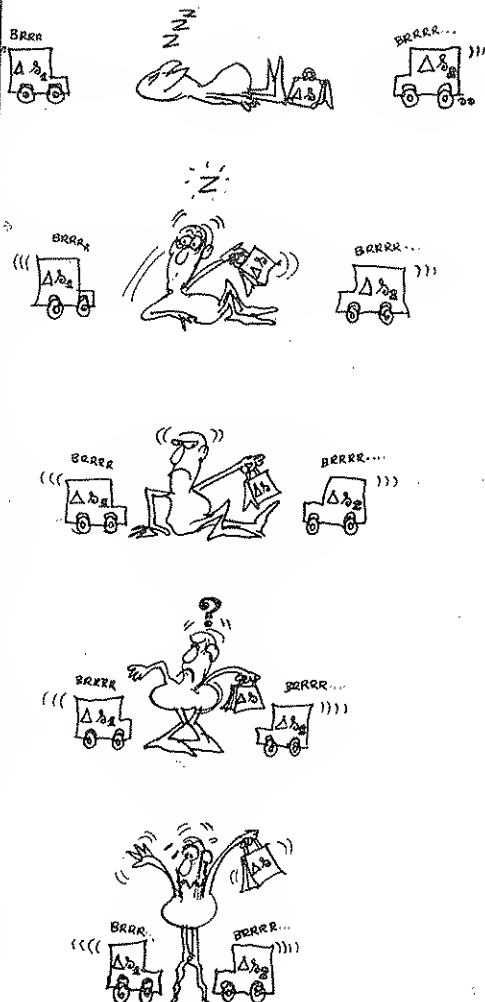
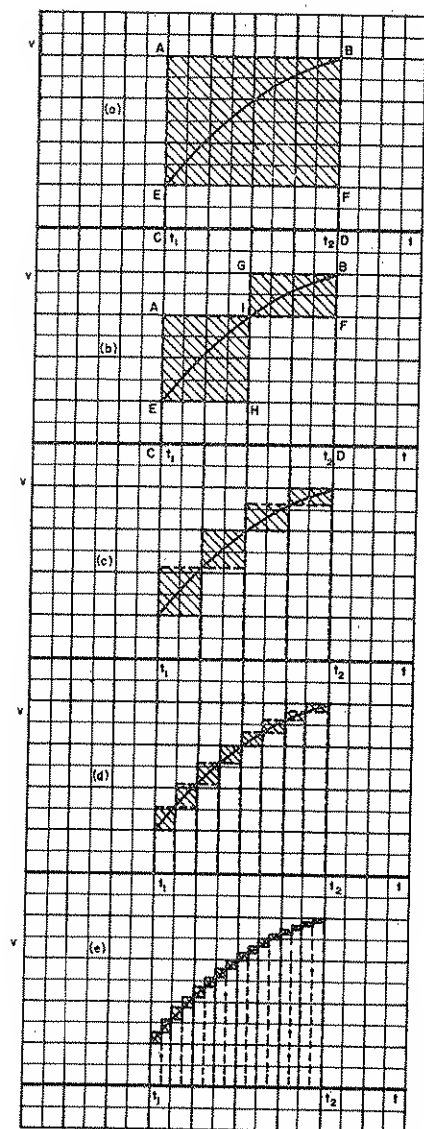



Figura IV-23

O mesmo processo é repetido outra vez (Fig. IV-23-c).

Ainda outra vez (Fig. IV-23-d).

Ainda outra vez (Fig. IV-23-e).

...

Qual é a conclusão óbvia?

É que Δs_1 vai sempre aumentando, enquanto Δs_2 vai sempre diminuin - do.

E como Δs está sempre entre os dois, eu acredito que você concordará em afirmar que Δs_1, Δs e Δs_2 tendem para o mesmo limite.

E é só olhar para a Fig. IV-22 para se convencer que êsse limite é proporcional à área debaixo da curva v vs t.

A demonstração precedente exige que no intervalo considerado a velocidade seja sempre crescente ou decrescente.

Mas como podemos dividir qualquer curva v vs t em intervalos em que a velocidade sempre cresce ou sempre decresce, bastará repetir o raciocínio para cada um dêsses intervalos.

E somar os resultados.

Isto é, somar as áreas. Contando como positivas as áreas acima do eixo dos t, ou melhor do lado dos v crescentes. E como negativas as áreas situadas do lado oposto.

Para ver como isso funciona, eu voltei à experiência com o carrinho e ao gráfico v vs t da Fig. IV-16.

Eu reproduzi êsse gráfico na Fig. IV-24.

O problema é calcular a área debaixo da curva v vs t no intervalo (0 - 1,4s).

Há várias maneiras de fazer isto.

Uma é contar quadradinhos. Mas isto se torna ràpidamente fastidio - so.

Outra é recortar a área que se quer medir e pesá-la com uma balança de precisão (veja com o seu Professor de Química). Sabendo-se quanto pesa uma fôlha inteira (sem as margens), uma regra de três lhe dará a área desejada.

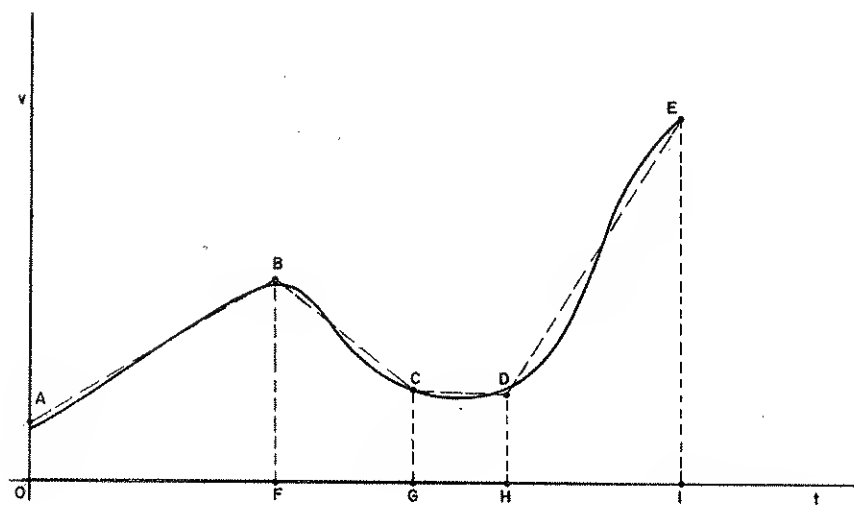



Figura IV-24

Outra ainda é substituir os arcos da curva v vs t por segmentos de retas, procurando "a ôlho" tirar por baixo o que se acrescenta por cima.

Depende do que você quer fazer com a informação...

Mas como eu não quero uma precisão muito grande (que eu não poderia ter aliás, mesmo querendo, não é?) eu utilizei o último método.

E eu construí os trapézios OABF, FBCG, GCDH e HDEI da Fig. IV-24.

Calculemos juntos o Δs_1 correspondente ao primeiro. As bases do trapézio medem respectivamente OA = 2,0cm e FB = 6,6cm. A altura é FH = 8,0cm.

A área é $1/2.(2{,}0 + 6{,}6).8{,}0 = 34{,}4\ cm^2$.

Os fatores de escala são respectivamente $k_1 = 1/15 s/cm$ e $k_2 = 10 s$.

De modo que $\Delta s_1 = 1/15 s/cm\ .\ 10\ 1/s\ .\ 34{,}4 cm^2 = 22{,}9 cm$.

Eu encontrei depois: $\Delta s_2 = 14{,}8 cm$; $\Delta s_3 = 5{,}6 cm$; $\Delta s_4 = 27{,}1 cm$.

Ao todo e com dois algarismos significativos: $\Delta s = 70 cm$.

Muito bem, quanto valia mesmo s_o? s_o era nulo.

De modo que o gráfico s vs t me diz que em t = 1,4s a posição da partícula devia ser 70cm.

Se você agora volta para o gráfico s vs t dessa experiência, (Figura IV-9), você verificará que em t = 1,4s, s era igual a 69cm.

70cm pelo gráfico v vs t. 69cm pelo gráfico s vs t. Em qual dos dois valores você tem mais confiança?

Você tem tôda razão.

Se você dispõe de uma fotografia estroboscópica como a da Figura IV-8, você não vai procurar um gráfico v vs t para medir a posição da partícula em determinado instante.

Você vai medir diretamente na fotografia.

Ou no gráfico s vs t.

No ponto em que estamos agora, conhecemos dois dos três membros da trilogia da Cinemática: posição e velocidade.

Conhecemos também a relação entre essas duas grandezas.

Passamos do gráfico a vs t para o gráfico a vs t medindo coeficientes angulares de tangentes.

Passamos do gráfico v vs t para um gráfico a vs t medindo as areas.

Resta ainda a caçula da família: a aceleração.

IV-10 Aceleração escalar.

A aceleração está para a velocidade como a velocidade está para a posição.

Lembrando isso evitará a necessidade de muitas repetições e permitirá avançar ràpidamente.

IV-10-1 Aceleração média.

Considere um gráfico v vs t qualquer (Fig. IV-25).

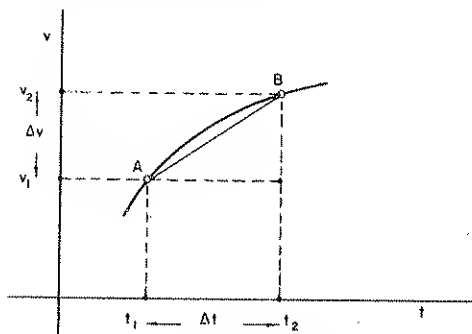



Figura IV-25

Em t_1 a velocidade é v_1.

Em t_2 a velocidade é v_2.

No intervalo $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ a velocidade escalar variou de

$$\Delta v \equiv v_2 - v_1$$

Por definição, chamaremos aceleração média da partícula no intervalo Δt à taxa de variação média da velocidade em função do tempo, naquêle interva

lo:

$$\boxed{\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \text{(IV-10)}$$

A aceleração média é proporcional ao coeficiente angular da corda AB do gráfico v vs t, definida pelas extremidades do intervalo considerado.

IV-10-2 Aceleração instantânea.

Medindo a aceleração média em intervalos de tempo cada vez menores, mas que começam sempre em t_1, achamos como limite a aceleração instantânea em t_1.

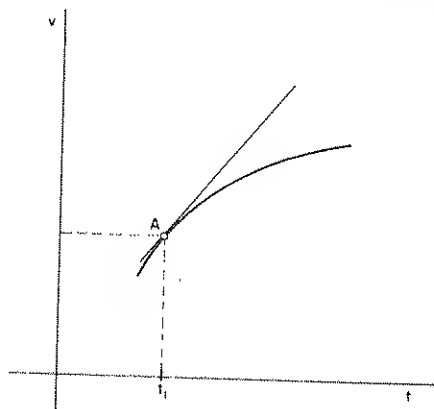



Figura IV-26

A aceleração instantânea é a taxa de variação instantânea da velocidade em função do tempo.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} \qquad \text{(IV-11)}$$

A aceleração média e a aceleração instantânea se medem em unidades de velocidades divididas por unidades de tempo.

Ou seja em m/s/s, o que convencionalmente se escreve m/s^2.

IV-10-3 Gráfico a vs t.

Tendo o gráfico v vs t do movimento de uma partícula, você obterá o gráfico a vs t medindo coeficientes angularea de tangentes.

E tendo o gráfico a vs t você poderia voltar ao gráfico v vs t medindo áreas debaixo da curva a vs t.

Desde que você conheça o valor de v em um instante qualquer, para poder "amarrar" o seu gráfico.

Nada mais tenho a acrescentar, a não ser aconselhar que você mesmo construa gráficos a vs t a partir de gráficoa v vs t.

Para não "perder a mão" eu construi o gráfico a vs t do movimento do carrinho, a partir do gráfico v vs t da Fig. IV-16.

Você o encontrará na Fig. IV-27.

Eu recomendo que você o estude cuidadosamente.

Não julgue o conceito de aceleração pelo pouco espaço que lhe foi consagrado nêste Capítulo.

É que capitalizamos sôbre o que aprendemoa no Capítulo III por um lado e a respeito da velocidade pelo outro.

a(cm/seg²)
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
t (s)

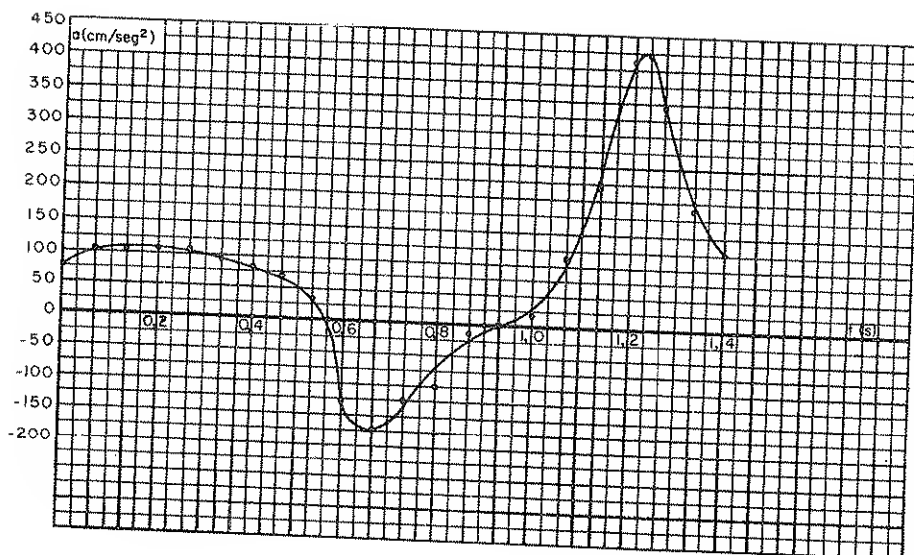



Figura IV-27

Na realidade a aceleração é o conceito mais importante da Cinemática.

Pois é êle que constitui a ponte pela qual chegaremos à Dinâmica.

Finalmente, poderíamos nos perguntar por quê o jôgo para aqui.

Da posição passamos para a velocidade. E da velocidade passamos para a aceleração.

Sempre medindo coeficientes angulares de tangentes.

Por quê razão parar na aceleração? Afinal das contas a aceleração é por sua vez função do tempo. Poderíamos talvez ter a curiosidade de saber qual é a sua taxa de variação?

No entanto o estudo da Cinemática não procede além da aceleração.

E a razão é muito simples.

Newton disse que se você conhece a aceleração de uma partícula, você sabe como o resto do Universo se comporta para com ela.

Mas isto é uma história que começaremos a contar no Capítulo IX.

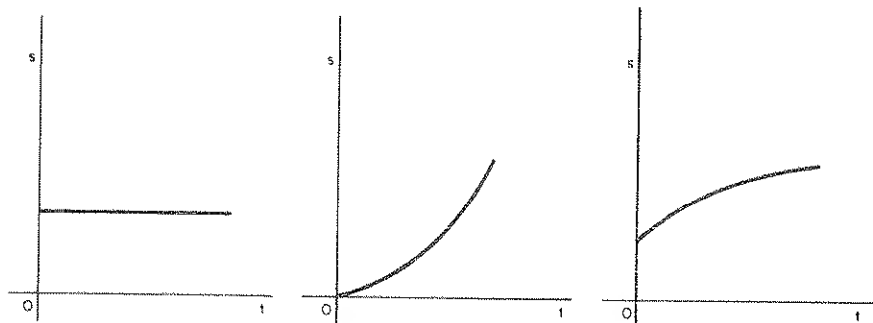
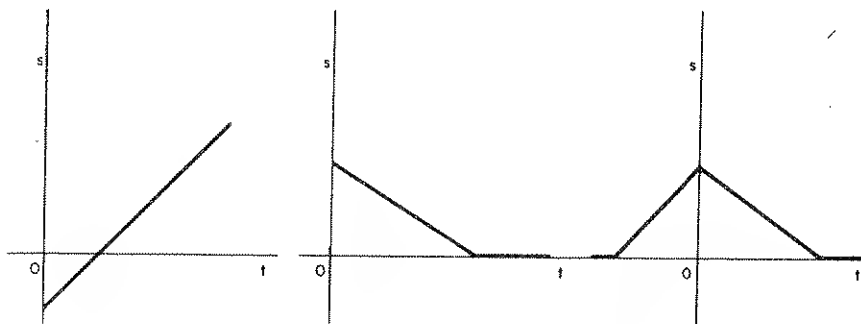
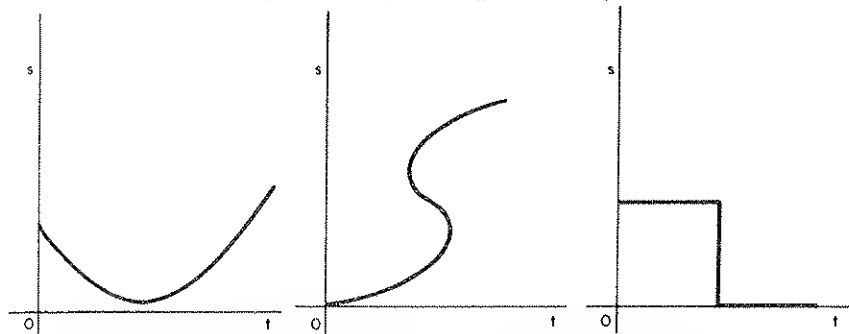
PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas "estrelados" (*) devem ser discutidos em aula com o seu Professor).

*IV-1 Quais das seguintes grandezas são escalares? (Em certos casos você terá de decidir se se trata ou não de uma grandeza física).

a área de uma fôlha de papel.
o comprimento de um lápis.
o volume de uma bola de futebol.
a posição de um navio em mar.
a carga dêsse navio.
a sua distância ao pôrto mais próximo.
a posição do Gerson no team do Botafogo.
a data de hoje.

*IV-2 Os gráficos propostos a seguir pretendem representar as posições s de várias partículas em função do tempo t.

Comente êsses gráficos.

*IV-3 Mesmo problema que o IV-2 para os gráficos seguintes:

*IV-4 Mesmo problema que o IV-2 para os gráficos seguintes:

IV-5 Suponha que você queira construir um estroboscópio semelhante ao que eu descrevi na seção IV-6 para estudar Cinemática. (Se você tem algum pendor para a mecânica aplicada, faça a montagem. Não é difícil e você vai divertir-se à bessa).

O motor com a engrenagem redutora gira o disco à razão de 10 rotações por segundo, digamos.

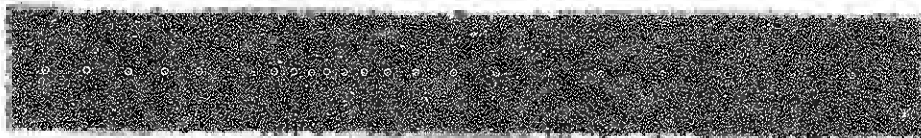
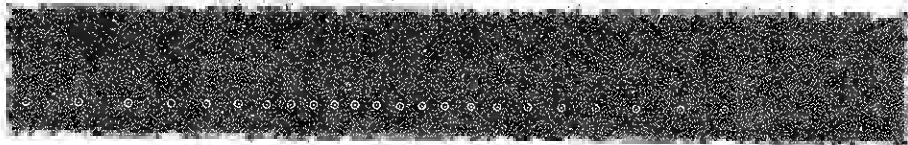
a) Qual é a menor frequência que você poderá obter? (Eu chamo frequência ao número de exposições por segundo).

b) Se você quiser uma frequência de 60 por segundo, qual será o número e a disposição das fendas que você abrirá?

c) Tendo o seu disco preparado para a frequência de 60 por segun-

dos, você quer bater uma chapa com uma frequência de 30 por segundos. O que você vai fazer?

IV-6 A Fotografia representa o registro estroboscópio do movimento de um carrinho. O sentido do movimento é da esquerda para a direita. A frequência das exposições é 30/s.

Construa cuidadosamente, em papel milimetrado, o gráfico s vs t. Especifique claramente suas escalas.

IV-7 Mesmo problema que o precedente, com a fotografia abaixo. O sentido do movimento e a frequência são os mesmos.

IV-8 No decorrer de uma viagem de automóvel Rio-São Paulo eu cronometrei as seguintes passagens:

Rio	0 km	14:30 h
Barra Mansa	127 km	16:06 h
Rezende	161 km	16:34 h
Lorena	223 km	17:25 h
Pindamonhangaba	266 km	17:59 h
São Paulo	437 km	20:15 h

a) Quais foram as velocidades médias parciais?

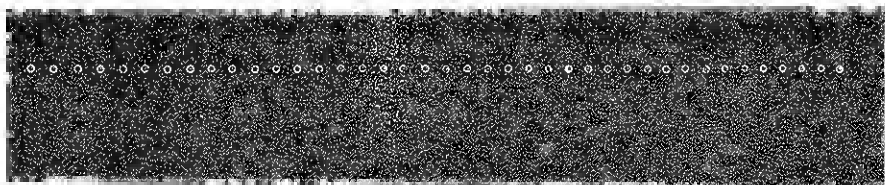
b) Qual foi a velocidade média no percurso todo?

c) Entre Lorena e Pindamonhangaba, não houve nenhum incidente (parada, congestionamento de tráfego...) digno de reparo. Eu passei por Guaratinguetá a 18:08 h. Você pode deduzir qual é em primeira aproximação a distância Lorena-Guaratinguetá?

IV-9 Refira-se ao gráfico s vs t da Fig. IV-10. Qual foi a velocidade média no intervalo (2,0s - 10,5s)?

IV-10 Refira-se ao gráfico s vs t da Fig. IV-11. "A vista", assinale com razoável aproximação o intervalo de um segundo durante o qual foi máxima a velocidade média.

*IV-11 A fotografia representa o registro estroboscópico do movimento de um carrinho. Antes da experiência eu nivelei cuidadosamente os trilhos. Eu lancei então o carrinho, que seguiu depois livremente, enquanto um estudante operava a máquina.

Analise a fotografia e, usando principalmente o seu <u>bom-senso</u>, diga em que sentido se processou o movimento do carrinho.

IV-12 A órbita da Terra em tôrno do Sol é pràticamente circular, sendo o raio igual a $1,5 \times 10^{11}$m.

Qual é a velocidade média da Terra na sua órbita?

IV-13 Em 9 de Fevereiro de 1966 os EUA puseram em órbita um satélite catalogado sob o nº 1997. A órbita dêsse satélite era quase que perfeitamente circular, sua altitude média sendo 506km. O período do 1997 era 94,7 min.

O raio médio da Terra é 6367 km.

Qual era a velocidade média do satélite na sua órbita?

*IV-14 Refira-se à Fig. IV-11. Determine as velocidades médias do automóvel nos intervalos:

(0,10h - 0,40h),(0,15h - 0,40h),(0,20h - 0,40h),(0,25h - 0,40h)
(0,30h - 0,40h),(0,35h - 0,40h) por um lado, e
(0,40h - 0,45h),(0,41h - 0,50h),(0,40h - 0,55h),(0,40h - 0,60h),
(0,40h - 0,65h),(0,40h - 0,70h) por outro lado.

a) Construa o gráfico <v> vs $|\Delta t|$. Êste gráfico comporta dois ramos: um para os t anteriores a 0,40h, outro para os Δt posteriores a 0,40h.

b) A partir do gráfico precedente, determina a velocidade instantânea em t = 0,40h. Com que precisão você pensa poder fazer essa determinação?

c) Compare o resultado obtido, com a medida da velocidade instantânea feita diretamente no gráfico s vs t, pelo coeficiente angular da tangente à curva.

d) Por quê razão pedi-lhe que determinasse velocidades médias em intervalos anteriores a 0,40h, e em intervalos posteriores àquele instante, o que forneceu os dois ramos do gráfico $\langle v \rangle$ vs $|\Delta t|$? Um só ramo não teria sido suficiente?

IV-15 Construa o gráfico v vs t do movimento registrado na fotografia do problema IV-6.

IV-16 Construa o gráfico v vs t do movimento registrado na fotografia do problema IV-7.

IV-17 Refira-se ao gráfico s vs t da Fig. IV-10.

Em que instantes é nula a velocidade da partícula?

IV-18 Refira-se à Fig. IV-11.

a) Qual foi a velocidade média do automóvel no intervalo (0-0,80h)?

b) Em que instante (ou instantes), a velocidade instantânea teve o valor daquela velocidade média?

*IV-19 Refira-se aos gráficos s vs t e v vs t da Fig. IV-17. Você observa que para um determinado instante do intervalo (t_1 t_2) a curva v vs t passa por um mínimo.

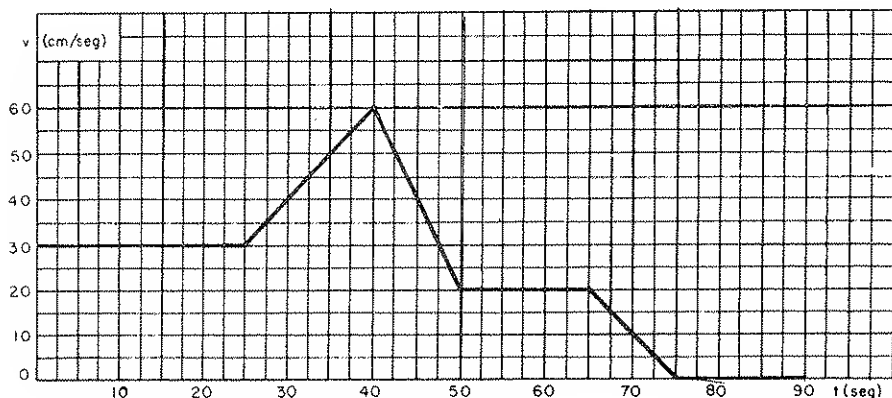
Procure no gráfico s vs t o ponto correspondente àquêle instante.

O que acontece à curva s vs t nêsse ponto?

(Sugestão: Compare os sentidos da rotação da tangente à curva s vs t antes e depois do instante considerado).

IV-20 Refira-se de nôvo à Fig. IV-17. Suponha que as escalas utilizadas no gráfico s vs t sejam respectivamente t(s) = 0,1x(cm) e v(cm/s)= 5y(cm).

Quais são nêsse caso as escalas do gráfico v vs t?

IV-24 A Figura representa o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ de uma partícula.

Sabe-se que em t = 0, s = 0.

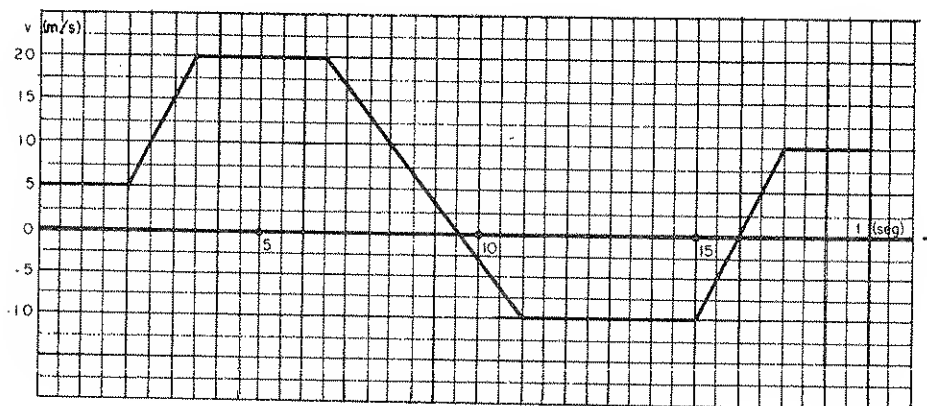
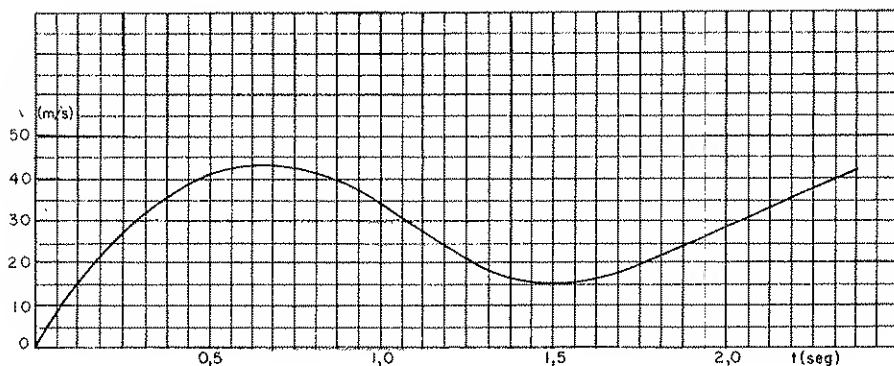
a) Qual é a posição da partícula em t = 25s? em t = 40s? em t = 50s? em t = 65s? em t = 75s? em t = 85s?

b) Qual é a velocidade média no intervalo (25s - 40s)? no intervalo (25s - 50s)? no intervalo (0 - 75s)?

IV-25 A Figura representa o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ de uma partícula.

Sabe-se que em t = 0, s = -20m.

a) Qual é a posição da partícula em t = 3,0s? em t = 5,0s? em t = 10s? em t = 16s? em t = 18s?

b) Qual é a velocidade média no intervalo (0 - 10s)? no intervalo (0 - 15s)? no intervalo (8,0s - 11s)?

IV-26 A Figura representa o gráfico v vs t de uma partícula.

Sabe-se que em t = 0, s = 0.

a) Qual é a posição da partícula em t = 2,0s?

b) Qual é a posição da partícula em a velocidade média no intervalo (0 - 1,0s)?

IV-27 Refira-se ao gráfico v vs t do Problema IV-24.

a) Qual é a aceleração média no intervalo (0 - 20s)? no intervalo (0 - 40s)? no intervalo (25 - 40s)? no intervalo (40 - 75s)?

b) Qual é a aceleração instantânea em t = 10s? t = 30s? t = 45s? t = 55s? t = 70s?

IV-28 Refira-se ao gráfico v vs t do Problema IV-25.

a) Qual é a aceleração média no intervalo (2,0s - 5,0s)? no intervalo (6,5s - 11s)?

b) Assinale um intervalo durante o qual a aceleração média é nula.

c) Qual é a aceleração instantânea em t = 3,0s? t = 10s? t = 16s?

IV-29 Refira-se ao gráfico v vs t do Problema IV-26.

Transporte o gráfico para um papel transparente e construa cuidadosamente, em papel milimetrado, o gráfico a vs t correspondente.

*IV-30 Ao analisar a fotografia estroboscópica do movimento de queda de uma bola, o Martins construiu a seguinte tabela.

t(s)	s(cm)	Δs(cm)	<v>(cm/s) em intervalos consecutivos de 1/30s	Δ<v>(cm/s)	$\frac{\Delta\langle v\rangle}{\Delta t}$ (cm/s^2)
0	13,2				
		2,7	81		
1/30	17,9			33	990
		3,8	114		
2/30	21,7			30	900
		4,8	144		
3/30	26,5			36	1080
		6,0	180		
4/30	32,5			30	900
		7,0	210		
5/30	39,5			33	990
		8,1	243		
6/30	47,6			30	900
		9,1	273		
7/30	56,7			36	1080
		10,3	309		
8/30	67,0				

Na base dessa tabela, Martins concluiu que:

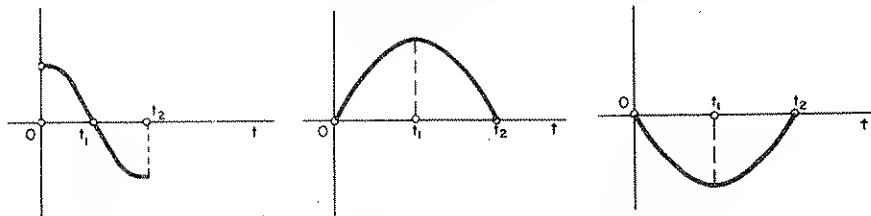
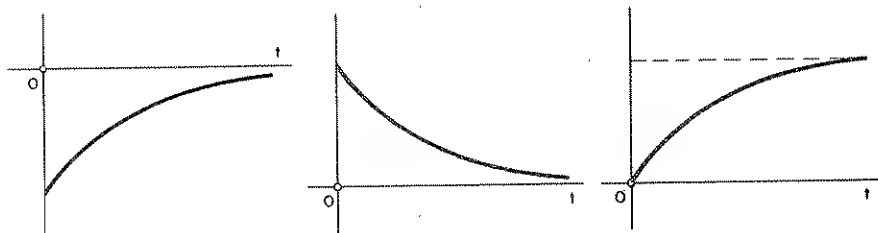
a) a aceleração média é constante em primeira aproximação.

b) consequentemente a aceleração instantânea é também constante, sempre em primeira aproximação.

c) o valor dessa aceleração é igual a:

$$\frac{990 + 900 + 1080 + 900 + 990 + 900 + 1080}{7} = 9,77 \times 10^2 cm/s^2$$

Critique a maneira pela qual o Martins analisou essa experiência.
(Sugestão: quantos valores de s foram realmente utilizados para a determinação do valor de a?)

*IV-31 A Figura reproduz (não necessàriamente nessa ordem!) os gráficos s vs t, v vs t e a vs t do movimento de uma partícula. Qual é qual?

*IV-32 Mesmo problema que o precedente com os gráficos seguintes:

CAPÍTULO V

Cinemática escalar - II - Aplicações

V-I O que vamos fazer com o que aprendemos no Capítulo IV.

Nêste Capítulo, vamos utilizar os conceitos que aprendemos no Capítulo precedente.

Em nível imediatamente utilizável, destacaremos dois tipos de movimento cuja importância em Física é fundamental:

- o movimento uniforme
- o movimento uniformemente variado.

Depois de definirmos êsses movimentos, chegaremos ao conceito extremamente importante de velocidade relativa.

V-2 Movimento uniforme.

V-2-1 Exemplos e definição.

Observe o movimento aparente do Sol, entre o nascer e o pôr. Ou o movimento da Lua.

Observe, se tiver a ventura de apanhá-lo no telescópio, o movimento do asteróide B-612.

É o asteróide do Pequeno Príncipe.

Observe a chuva que cai.

Ou o movimento de uma pedrinha que você deixa cair em um balde de água.

Se você mora à beira-mar observe o movimento dos navios antes de aportar, ou depois de deixar o pôrto.

Observe o movimento do trem que atravessa a baixada.

Todos êsses movimentos, e muitos outros, têm algo em comum: em excelente aproximação para o Sol, a Lua e o Asteróide do Pequeno Príncipe; para a gôta de chuva e para a pedrinha (enquanto está caindo na água); e certamente com bôa aproximação para o navio e para o trem, se o intervalo de observação não ultrapassar, digamos, alguns segundos.

Em todos êsses movimentos as partículas pelas quais mentalmente substituímos os objetos e as coisas reais têm suas velocidades escalares constantes.

Todos êsses movimentos são exemplos de movimentos uniformes.

Dentro da faixa de aproximação considerada aceitável, claro.

Definamos então, matemàticamente, o movimento uniforme.

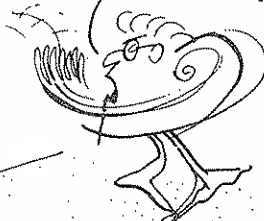
Um movimento será dito uniforme tôdas as vêzes que a velocidade escalar fôr constante:

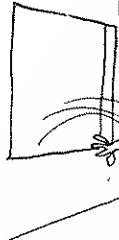
$$\boxed{v = cte} \qquad (V\text{-}1)$$

MARTINS E EU

O SENHOR NÃO PODERIA DAR A DEFINIÇÃO FÍSICA DO MOVIMENTO UNIFORME?

ACHO QUE NÃO MARTINS. ALIÁS, NÃO VAMOS BRIGAR POR DEFINIÇÕES. VOU TENTAR LHE EXPLICAR O QUE EU QUERO DIZER!

PELA DEFINIÇÃO, UM MOVIMENTO REAL É UNIFORME SE A VELOCIDADE FOR CONSTANTE. PARA SABER SE A VELOCIDADE É CONSTANTE O QUE VOCÊ VAI FAZER MARTINS?

VOU MEDIR A VELOCIDADE, NÉ?
A VELOCIDADE INSTANTÂNEA MARTINS?

NÃO! A VELOCIDADE MÉDIA EM INTERVALOS MUITO PEQUENOS...
CERTO! MAS DO MOMENTO...

JÁ SEI! DO MOMENTO QUE EU MEÇO, EU FIXO À PRIORI UMA MARGEM DE ÊRRO OU UMA FAIXA DE APROXIMAÇÃO!

DEPENDENDO DO QUE O MARTINS QUER FAZER COM SUA MEDIDA!!!!!

CONTINUA MARTINS...
E... E... EU NUNCA VOU SABER SE O MOVIMENTO REAL É MATEMATICAMENTE UNIFORME OU NÃO?

NUNCA! VOCÊ ACHA ISTO INCÔMODO? AFINAL, ESTAMOS EM FÍSICA OU NÃO? DO MOMENTO EM QUE ESTAMOS EM FÍSICA BASTA SABER QUE O MOVIMENTO É FÍSICAMENTE UNIFORME PARA O QUE QUEREMOS FAZER COM ÊLE NATURALMENTE!

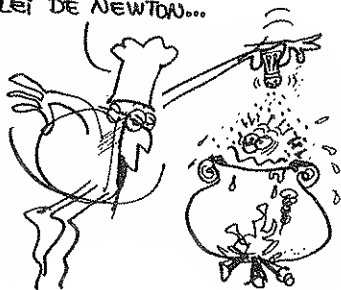
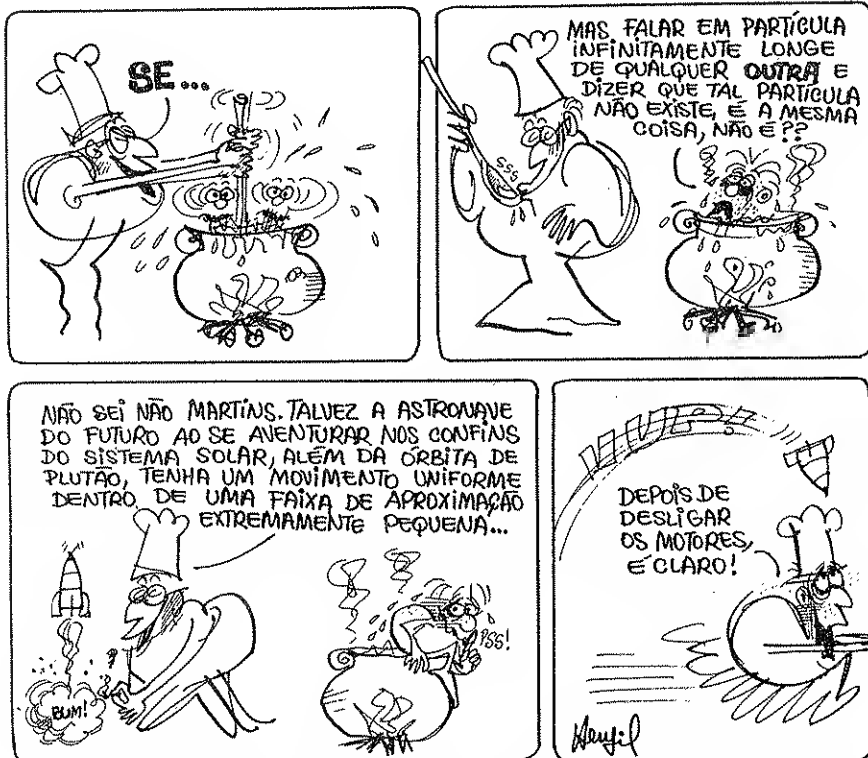
PROFESSOR, HÁ MOVIMENTOS MATEMATICAMENTE UNIFORMES?
ZUMM!

EU PENSAVA QUE VOCÊ TINHA ENTENDIDO!!

DESCULPE PROFESSOR! EU QUERIA DIZER: QUAL É O MOVIMENTO MAIS MATEMATICAMENTE UNIFORME?

VOCÊ QUER DIZER PROVAVELMENTE: QUAL É O MOVIMENTO QUE SE APROXIMA MAIS FISICAMENTE DA DEFINIÇÃO MATEMÁTICA?
É SIM SENHOR!

NÃO SEI MARTINS. ISTO É DIFÍCIL! VOCÊ VÊ, APRENDEREMOS MAIS TARDE QUE EXISTE TEORICAMENTE UMA SITUAÇÃO QUE SERIA A CONTRAPARTIDA FÍSICA DA DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DO MOVIMENTO UNIFORME!
CHUÁ!

É A SITUAÇÃO DESCRITA PELA CHAMADA 1ª LEI DE NEWTON...

EM SUBSTÂNCIA SE UMA PARTÍCULA ESTIVESSE INFINITAMENTE LONGE DE QUALQUER OUTRA PARTÍCULA HAVERIA SEMPRE UMA MANEIRA DE DESCREVER O SEU MOVIMENTO COMO MOVIMENTO UNIFORME...

Muito bem, no movimento uniforme a velocidade escalar é constante. A taxa de variação do espaço em função do tempo é constante.

V-2-2 Consequências da definição: aceleração e posição.

Partimos da definição e do gráfico v vs t correspondente, como na Fig. V-1.

As seções III-4-1 do Capítulo III e IV-9-1 do Capítulo IV (que você deve reler se fôr necessário) permitem construir imediatamente o gráfico a vs t e um gráfico s vs t possível.

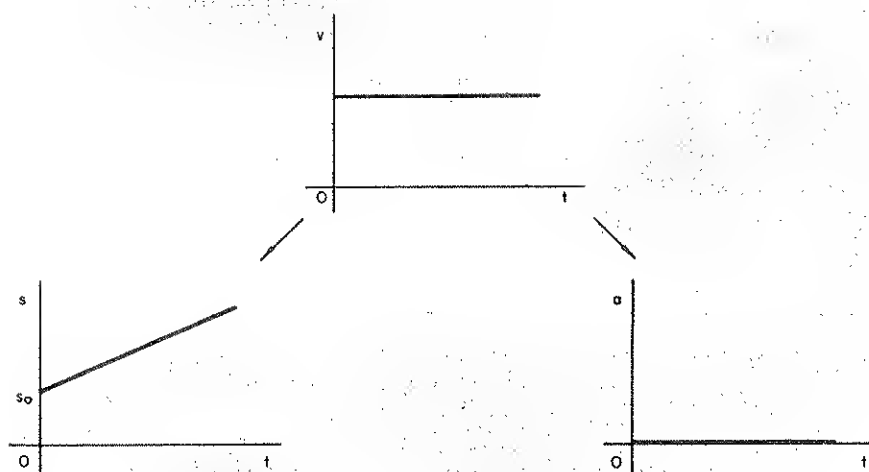



Figura V-1

Observamos imediatamente que:

1) <u>a aceleração escalar é nula.</u>
2) <u>a posição s é dada em função do tempo pela expressão</u>

$$\boxed{s = s_o + vt} \qquad \text{(V-2)}$$

em que s_o representa a posição da partícula no instante zero.

Lembre-se que se $\underline{v}$ fôr positivo a reta $\underline{s}$ vs $\underline{t}$ terá um coeficiente angular positivo e consequentemente será assim:

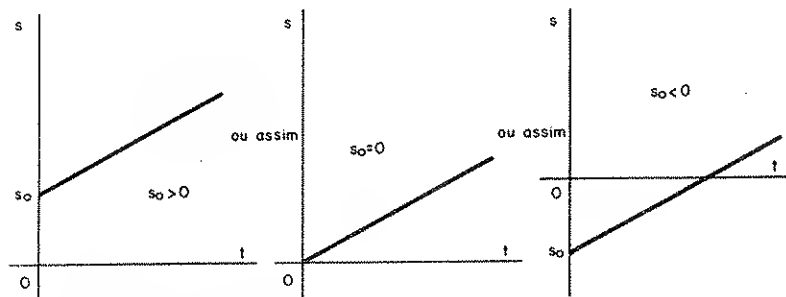



Figura V-2 : $v > 0$

E se $\underline{v}$ fôr negativo a reta $\underline{s}$ vs $\underline{t}$ terá um coeficiente angular negativo e consequentemente será assim:

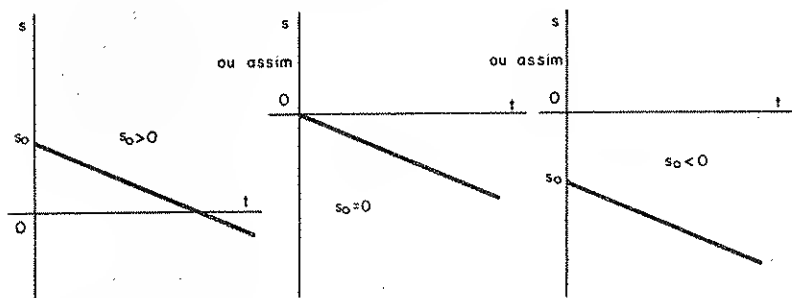
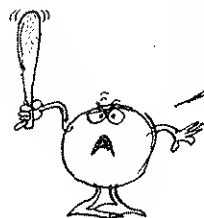



Figura V-3 : $v < 0$

Convença-se que seria perfeitamente lícito definir o movimento uniforme dizendo que:

a) é o movimento caracterizado por $a = 0$ <u>ou</u>

b) é o movimento caracterizado por

$$s = s_o + vt.$$

Discuta isto com o seu Professor.

V-3 Movimento uniformemente variado.

V-3-1 Exemplos e definição.

Figura V-4

Observe uma pedra que cai livremente.

Eu sei que é difícil observar uma pedra que cai (com o sentido físico do verbo observar).

Eis porque eu reproduzi na Fig. V-4 a fotografia batida pela câmera estroboscópica que eu encarreguei de observar por mim.

Observar não uma pedra, aliás.

Mas uma bola de aço suspensa por um eletro-ímã e que é largada pela abertura de um circuito elétrico muito simples.

Na reprodução, a seta assinala a primeira posição da bola caindo registrada pela câmera.

É essa posição que será tomada como origem das abscissas.

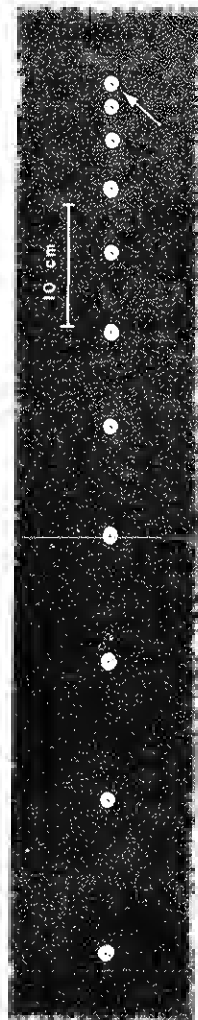
O instante correspondente será tomado como origem dos tempos.

Seguem-se mais dez posições sucessivas da bola na sua queda.

Duas posições consecutivas correspondem a instantes separados por 1/30s.

Eu quero construir um gráfico v vs t.

Em consequência eu vou medir as velocidades médias nos intervalos sucessivos de 1/30s.

Para medir as velocidades médias eu meço diretamente na fotografia as distâncias entre posições sucessivas. Como eu tenho uma escala que representa 10cm, uma simples regra de três me permite saber qual foi o espaço percorrido pela bola (nêsse caso é a mesma coisa que

Eu não meço os a aucesaivos, todos êles a partir da origem escolhida. Você observou bem? Pois para reduzir o maia possível a margem de êrroa eu quero tornar tôdas as minhaa medidaa independentea umas das outras.

O que não aconteceria ae eu calculasae os Δa por diferença entre oa oa a medidoa.

Pois então cada Δs calculado dependeria do precedente. De acôrdo?

Eu obtive a tabela aeguinte:

Tabela V-1

intervalo (s)	Δa (cm)	<v>(cm/s)
0 - 1/30	1,4	42
1/30 - 2/30	2,4	72
2/30 - 3/30	3,4	102
3/30 - 4/30	4,6	138
4/30 - 5/30	5,7	171
5/30 - 6/30	6,8	204
6/30 - 7/30	7,8	234
7/30 - 8/30	8,9	267
8/30 - 9/30	10,1	303
9/30 - 10/30	11,2	336

A Fig. V-5 mostra o gráfico correspondente.

Como de costume, as velocidades médias foram lançadas nos meios dos intervalos de tempo correspondentes.

Em primeira aproximação, o gráfico é linear.

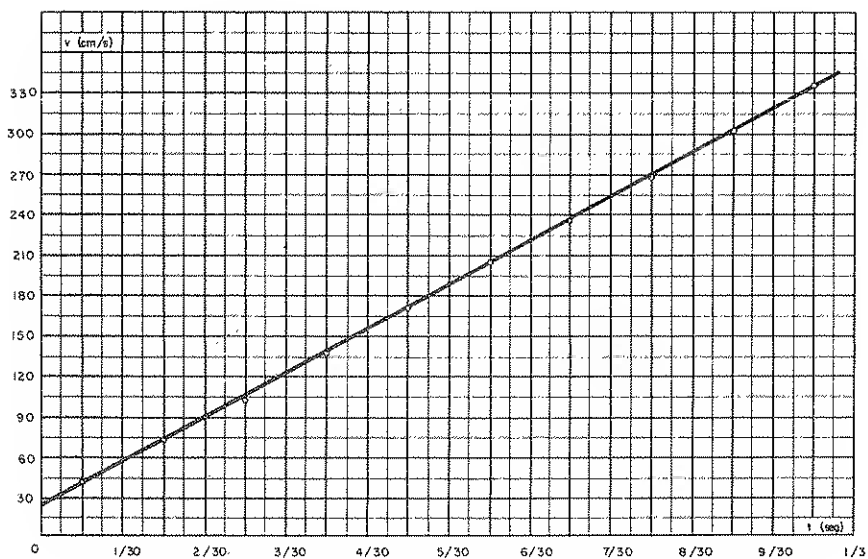



Figura V-5

Como também é linear, em primeira aproximação, o gráfico v vs t de um carrinho que rola livremente ao longo de um plano inclinado.

O movimento da bola, o do carrinho, são exemplos de movimentos uniformemente variados.

Definamos matemàticamente o movimento uniformemente variado:

Um movimento será dito uniformemente variado tôdas as vêzes que a velocidade escalar fôr uma função linear do tempo:

$$v = v_o + at \qquad (V-3)$$

O sentido das constantes v_o e a e de interpretação imediata:

v_o é a velocidade da partícula no instante zero. Essa constante é chamada velocidade inicial.

a é a taxa de variação (constante) da velocidade escalar em função do tempo: é a aceleração constante do movimento.

V-3-2 Aceleração escalar.

Já vimos que ela é constante: fìsicamente, isto significa que em intervalos de tempos iguais a velocidade aumenta ou diminui de uma quantidade constante.

A velocidade pode crescer (aceleração positiva):

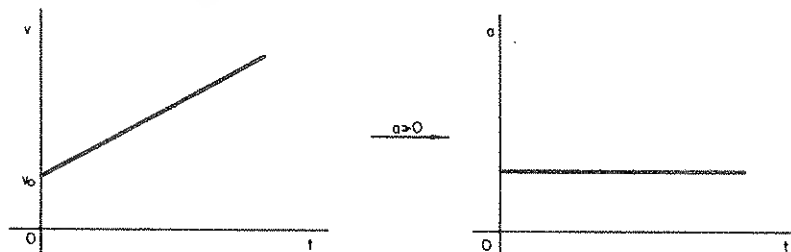



Figura V-6

ou ela pode decrescer (aceleração negativa ou deceleração):

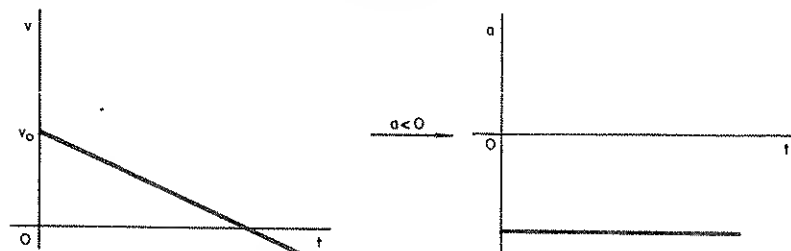



Figura V-7

Quando um corpo cai no vácuo (e em bôa aproximação no ar, no caso de uma pedra, ou de uma bola de aço...) a aceleração escalar é constante, se representa pelo símbolo "g", e é igual a 9,81 m/s^2.

MARTINS E EU

PARA QUE CORPO PROFESSOR?
PARA TODOS OS CORPOS MARTINS!
TECO!

MAS ISTO É IMPOSSÍVEL!

POIS EXPERIMENTE MARTINS. DEIXE CAIR ÊSTE APAGADOR E ÊSTE PEDAÇO DE GIZ. NÃO! DA 'MESMA ALTURA... ASSIM! AGORA SOLTE AO MESMO TEMPO...

PLIC!
PLOC!

ENTÃO? CHEGARAM OU NÃO CHEGARAM JUNTOS?
É...É...É... PARECE QUE SIM!

AGORA TENTE COM ESTA PEDRA E ESSA FOLHA DE PAPEL AMASSADA...
AMASSADA MARTINS!
FEITO UMA BOLA!!

VIU?
ONC!
PLECH!

E SE EU NÃO QUISER AMASSAR?

ENTÃO VOCÊ TERIA QUE EXPERIMENTAR NO VÁCUO... E CAIRIAM JUNTOS!
JÁ QUE O SENHOR DISSE...

NÃO SOU EU QUEM DIZ, MARTINS! É A NATUREZA! É A EXPERIÊNCIA!
UAU!
PONC!

VÁ LÁ! VÁ LÁ! MAS QUE É DIFÍCIL DE ENGULIR, É!

O que Martins tem tanta dificuldsde da engulir é indigesto para todos nós.

A constância da aceleração da queda para todos os corpos (no vácuo a rigor) está ligada a um dos msis profundos mistérios da Natureza.

Voltaremos a falsr disto mais tarda.

V-3-3 Posição em função do tempo.

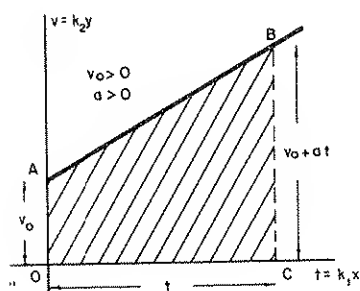
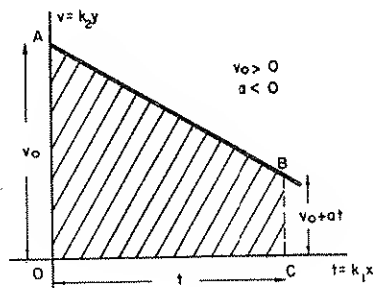



Figura V-8

A Fig. V-8 representa dois gráficos v vs t possíveis psra um movimento uniformemente variado.

No caso (a), a velocidade cresce com o tempo: a acelersção a é positiva.

No caso (b), a velocidade decresce com o tempo: a sceleração s é negativa.

Em ambos os casos a posição da partícula no instsnte t é proporcional à área do trapézio OABC. Veja de novo a seção IV-9-2 do Capítulo IV se fôr necessário.

As escalas dos gráficos são:

$$t = k_1 x, \quad v = k_2 y$$

Aprendemos que:

$$\Delta s = k_1 k_2 \text{ (área OABC)}$$

A área OABC vale

$$\frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{CB})\overline{OC}$$

Observe agora que

$$\overline{OA} = \frac{v_o}{k_2} \qquad \overline{CB} = \frac{v_o + at}{k_2} \qquad \overline{OC} = \frac{t}{k_1}$$

De modo que:

$$\text{(área OABC)} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_o}{k_2} + \frac{v_o + at}{k_2}\right)\frac{t}{k_1} = \frac{1}{k_1 k_2} \left(v_o t + \frac{1}{2} at^2\right)$$

E finalmente

$$\Delta s = v_o t + \frac{1}{2} at^2 \qquad \text{(V-4)}$$

Representemos por s_o o valor de s no instante zero (s_o é a posição inicial da partícula).

Então

$$\boxed{s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2} \qquad \text{(V-5)}$$

No entanto, nada nos garante que a expressão precedente, demonstrada para os casos da Fig. V-8, seja válida no caso geral.

A Fig. V-9 mostra outros gráficos v vs t de movimentos uniformemente variados.

Os casos (a) e (b) são análogos aos da Fib. V-8. A expressão correspondente de Δs é ainda (V-4).

A única diferença é que a substituição numérica forneceria valores negativos para Δs, do momento que os trapézios OABC estão situados abaixo do eixo dos t.

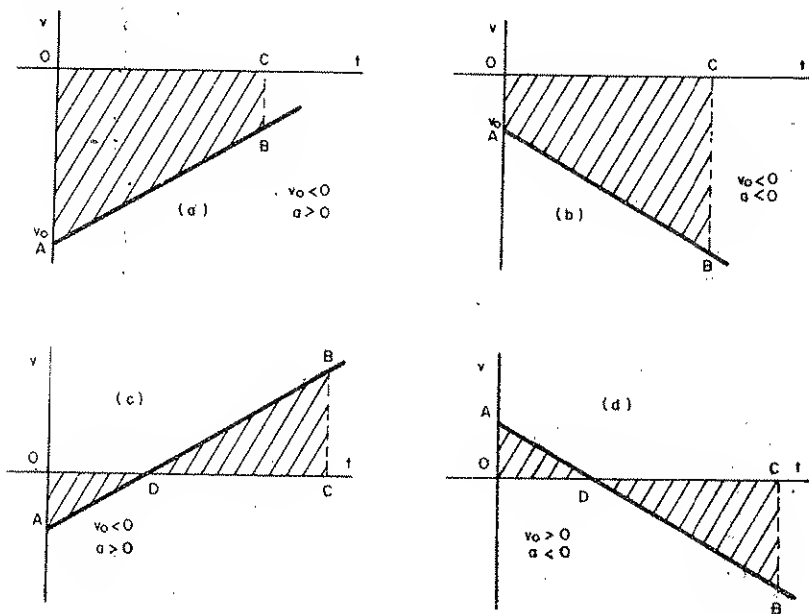



Figura V-9

Os casos (c) e (d) são aparentemente um pouco mais complicados. Aqui a velocidade se anula no intervalo $(0,t)$.

Δs continua sendo igual, porém, ao produto por $k_1 k_2$ da área total: área do triângulo OAD + área do triângulo DBC.

Determine o instante em que a velocidade se anula.

Calcule as áreas dos dois triângulos e some.

Você encontrará de novo a expressão (V-4) para Δs.

Concluímos então que a expressão (V-5) fornece $s(t)$ em qualquer caso.

V-3-4 Gráfico s vs t.

O segundo membro da expressão:

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2 \qquad \text{(V-5)}$$

é um trinômio do segundo grau na variável t.

O gráfico s vs t é um arco de parábola cujo eixo é paralelo ao eixo dos s.

A Fig. V-10 mostra um gráfico s vs t possível.

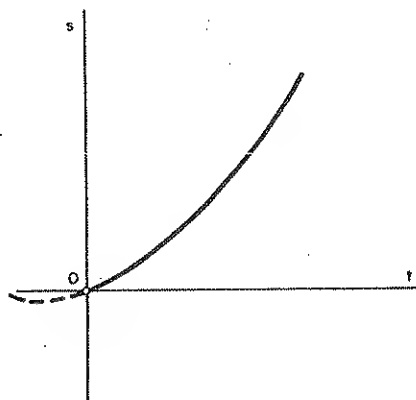



Figura V-10

Você construirá em exercícios outros gráficos s vs t correspondentes a valores diversos de s_o, v_o e a.

V-3-5 <u>Velocidade média</u>.

Eu espero que você já tenha discutido o Problema IV-23 do Capítulo IV.

Se não, ainda está em tempo...

Veja então a Fig. V-11: é o gráfico <u>v</u> vs <u>t</u> de um movimento uniformemente variado.

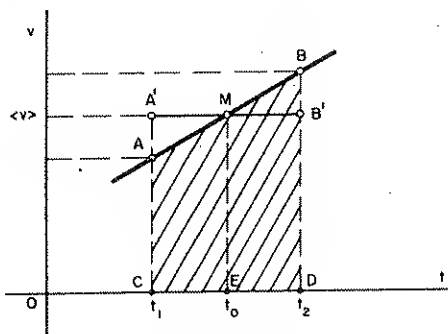



Figura V-11

Considere um intervalo de tempo qualquer $(t_1\ t_2)$ e o instante t_o meio do intervalo.

O ponto do gráfico correspondente a t_o é o ponto M.

Construa a horizontal que passa por M: ela encontra em A' e B' as verticais AC e DB dos extremos do intervalo $(t_1\ t_2)$.

A área do retângulo CA'B'D é obviamente igual à área do trapézio CABD.

O que prova que a horizontal A'B' determina a velocidade média <v> durante o intervalo $(t_1\ t_2)$.

Observe que a velocidade <v> é a velocidade da partícula no instante t_o:

<u>no movimento uniformemente variado a velocidade média em um intervalo de tempo qualquer é igual à velocidade da partícula no instante meio do intervalo</u>.

Ou ainda, observando na Fig. V-11 que a base média EM do trapézio

(proporcional a $\langle v\rangle$) é a semi-soma das bases CA (proporcional a v_1) e DB (proporcional a v_2):

$$\boxed{\langle v\rangle = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$$ (...)

Quando, na seção IV-8, decidimos lançar as velocidades médias nos meios dos intervalos de tempo correspondentes, não podíamos prever que a recompensa chegaria tão cedo: no movimento uniformemente variado a velocidade média em um intervalo coincide com a velocidade instantânea no meio do intervalo!

V-4 Prenúncio de um problema fundamental em Mecânica: o da mudança de referencial.

Não se deixe (nunca) assustar por palavras.

O título dessa seção tem algo rebarbativo. O que é que "mudança de referencial"?

Mas vamos juntos, devagar. Você vai entender.

V-4-1 "Quando é que Princeton chega a esse trem?"

Você já ouviu falar de Albert Einstein.

Todo mundo já ouviu falar de Einstein.

MARTINS E EU

É VERDADE QUE EINSTEIN ERA UM MAU ALUNO?

DIGAMOS QUE EINSTEIN NÃO ERA UM ALUNO DO TIPO TRADICIONAL PARA A ÉPOCA...

O QUE NÃO O IMPEDIU DE DESCOBRIR DE NÔVO A GEOMETRIA EUCLIDIANA COM PALITOS DE FÓSFORO, QUANDO ÊLE TINHA MENOS DE 10 ANOS...

E TAMPOUCO O IMPEDIU DE PUBLICAR, AOS 26 ANOS, QUATRO TRABALHOS TÃO IMPORTANTES QUE PROVOCARAM VERDADEIRAS REVOLUÇÕES EM TRÊS RAMOS DA FÍSICA!
QUAIS SÃO??

A MECÂNICA, COM A TEORIA DA RELATIVIDADE, A FÍSICA ESTATÍSTICA COM A TEORIA DO MOVIMENTO BROWNIANO, A FÍSICA MOLECULAR E ATÔMICA, COM A EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA, E A TEORIA QUÂNTICA DA RADIAÇÃO!

E A PROPÓSITO MARTINS, QUE O EXEMPLO DO MAU ALUNO EINSTEIN NÃO O IMPEÇA DE FAZER O SEU DEVER DE CASA PARA AMANHÃ, TÁ?

Pois bem, desde 1933 até sua morte em 1955, Einstein viveu em Princeton, nos Estados Unidos. Era êle professor do Instituto para Estudos Avançados naquela cidade.

E contam - não sei se é verdade - que durante uma das suas frequentes viagens por trem de Nova York a Princeton, teria êle perguntado ao condutor: "quando é que Princeton chega a êsse trem?"

Você pode imaginar sem muito esfôrço o espanto do condutor.

Porém Einstein estava absolutamente certo.

Se você está em um trem, ou em um automóvel, o trem ou o automóvel estão em repouso em relação a você.

Êles tem, para você, velocidade nula.

Você está sentado em um automóvel. A extremidade do capô dista dois metros de você.

Essa distância varia, quando o carro anda numa estrada?

Claro que não.

Você entende agora por quê a velocidade do carro em relação a você é nula?

Pelo contrário as árvores da beira da estrada, ou os postes telegráficos da estrada de ferro, ou as casas da rua... estão se movendo em relação a você.

Se o automóvel anda a 80 km/h sôbre a estrada, com que velocidade as árvores estão vindo ao encontro do carro?

Certo, êles estão vindo ao seu encontro a 80 km/h!

A estação de Princeton está vendo o trem chegar com velocidade de 100 km/h.

O trem, e Einstein sentado no seu compartimento, estão vendo a estação chegar a seu encontro com velocidade de 100km/h.

Diz-se em Física que todo movimento é relativo.

Ao escrever essas palavras a ponta do lápis anda sôbre o papel. O lápis está em movimento em relação ao papel.

Mas para uma formiga literata que estaria parada sôbre o lápis, é a fôlha do papel que está em movimento.

Você entende agora a pergunta de Einstein ao condutor?

V-4-2 O problema unidimensional da velocidade relativa.

O carro nº 21, andando a 180km/h, acaba de ultrapassar o carro número 10, andando a 160km/h.

Se ambos continuassem com essas mesmas velocidades, a distância AB aumentaria 180 - 160 = 20km em uma hora, certo?

Para o carro A, o carro B avança a 20km/h.

E para o carro B, o carro A recua a 20km/h.

Adotando como sentido positivo o da figura, diremos que a velocidade do carro B em relação ao carro A é +20km/h.

A velocidade do carro A em relação ao carro B é -20km/h.

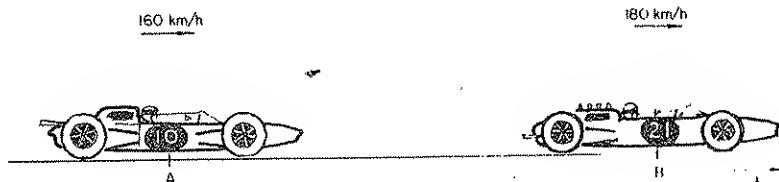



Figura V-12

O barco Neptúnio I andando a 35km/h, vai cruzar-se com o barco Neptúnio II, andando em sentido contrário a 25km/h. (Fig. V-13).

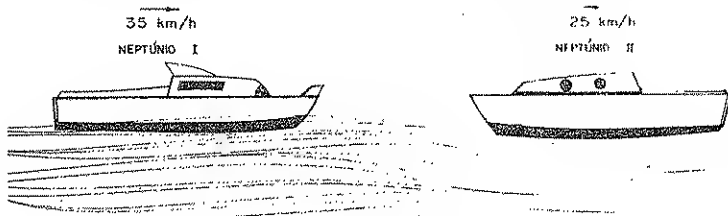



Figura V-13

Se os barcos conservarem suas velocidades constantes, a distância entre êles diminui a razão de 35 + 25 = 60km por hora antes do encontro, e aumenta com a mesma taxa depois do encontro.

Para o Neptúnio I, o Neptúnio II anda a -60km/h (veja o sentido positivo escolhido).

Para o Neptúnio II, o Neptúnio I anda a +60km/h.

A Fig. V-14 representa o gráfico v vs t de dois móveis A e B com movimento uniforme.

A velocidade de B em relação a A é: $v_{B/A} = v_B - v_A$ (V-7)

A velocidade de A em relação a B é: $v_{A/B} = v_A - v_B$ (V-8)

Evidentemente: $v_{B/A} = -v_{A/B}$ (V-9)

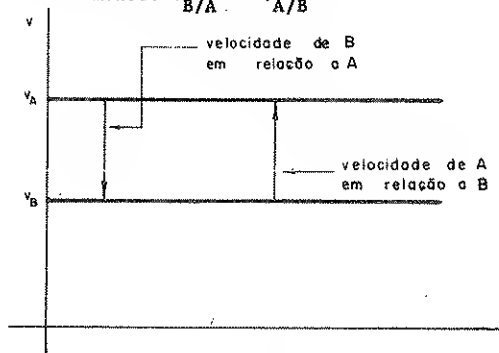
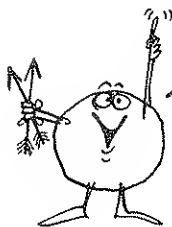



Figura V-14

A Fig. V-14 poderia representar os gráficos v vs t dos dois carros da Fig. V-12.

O carro A seria o nº 10 ou o nº 21?

Faça os gráficos v vs t dos dois navios da Fig. V-13.

Represente por duas setas, como na Figura V-14, as velocidades relativas $V_{I/II}$ e $V_{II/I}$.

Tudo isto é muito bonito, dirá você, mas qual é a utilidade em preocupar-se com velocidade relativa?

A resposta é simples: muitos problemas tornam-se mais fáceis quando o movimento da partícula ou do objeto que nos interessa é estudado por um observador em movimento em relação a nós.

Se isto não está bem claro, deixe-me lhe dar um exemplo: olhe para uma bicicleta que anda na rua (Fig. V-15).

Se eu lhe perguntar: qual é a trajetória de um ponto P de uma das rodas, você me responderá provàvelmente: "Ué! é uma circunferência!"

Mas não é não.

Para você, não é.

Para você, é uma curva parecida com a que eu desenhei na figura.

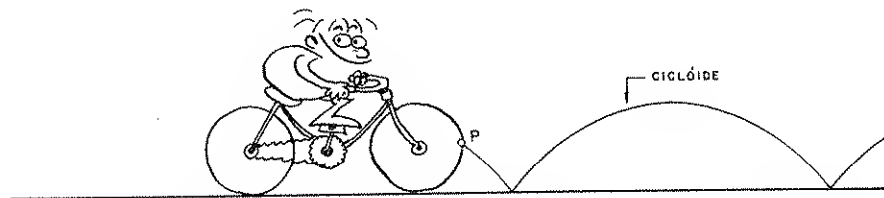



Figura V-15

Essa curva é chamada ciclóide.

É uma curva complicada.

No entanto, para o ciclista, a trajetória é obviamente uma circunferência.

A circunferência é uma curva muito mais fácil de representar-se que uma ciclóide.

E eis porque você me responde que a trajetória é uma circunferência.

Ao estudar a trajetória do ponto, você se colocou inconscientemente no lugar do ciclista. Ou de um observador que acompanharia a bicicleta. De um observador para o qual a bicicleta teria velocidade nula.

Você mudou de ponto de vista, porque o problema proposto se torna imediatamente muito mais simples.

Eis porque é bom que você se acostume desde já com velocidades relativas. A mudança de observador, ou "de ponto de vista" como eu disse acima, faz parte de um processo conhecido em Física por "mudança de referencial". O que é exatamente isto, esperaremos o Capítulo VI para sabê-lo.

Mas desde já saiba que é uma das ferramentas mais úteis das que possui o Físico.

Apliquemos isto a dois problemas simples.

V-4-3 O "problema dos correios".

A correspondência dos séculos passados locomovia-se a pé ou a cavalo, levada por "correios". Dois correios saíam simultâneamente de duas cidades A e B, indo ao encontro um do outro. Quando é que se encontravam?

Modernizemos o problema.

Dois automóveis partem simultâneamente do Rio de Janeiro e de São Paulo. O que parte do Rio anda uniformemente a 80km/h. O que sai de São Paulo anda uniformemente a 120km/h.

Arredondemos a 400km/h a distância entre as duas cidades.

Quando é que se encontram os automóveis?

Antes de iniciar o problema comente com os seus botões quanto (o quão pouco) tem de irreal a situação proposta.

Construamos os gráficos v vs t dos dois carros orientando positivamente a estrada no sentido do Rio para São Paulo.

A Fig. V-16 representa êsses gráficos para você ou para mim, que estamos sentados nesta sala de aula. O carro do Rio tem velocidade igual a +80km/h. O carro de São Paulo tem velocidade igual a -120km/h.

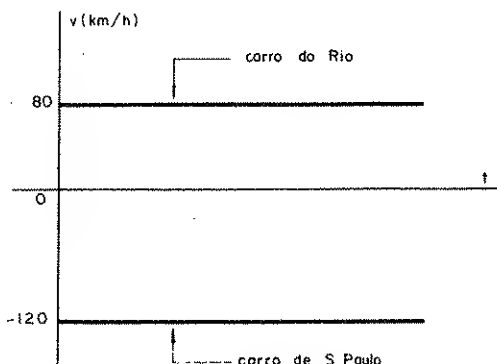



Figura V-16

O problema (embora simples) tem um elemento que complica a situação: dois carros em movimento.

Simplifiquemos isto, colocando-nos no carro que sai de São Paulo (por exemplo).

Imobilizamos assim um automóvel (para o observador sentado ao lado do motorista, claro).

O outro carro tem uma velocidade <u>relativa</u> de 120 + 80 = 200km/h. Não esqueça com efeito que os carros vão ao encontro um do outro.

O gráfico <u>v</u> vs <u>t</u> correspondente é o da Fig. V-17.

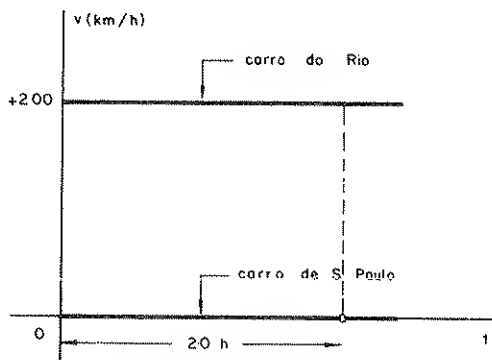



Figura V-17

O problema agora é: um automóvel andando a 200km/h vem ao meu encontro, partindo de um ponto distando 400km de mim. Quanto tempo levará para chegar?

E a resposta é evidentemente: êle levará duas horas.

Volte a considerar as Fig. V-16 e V-17. Mudar de observador em um gráfico <u>v</u> vs <u>t</u>, traduz-se por uma mudança do eixo dos tempos, fazendo-o coincidir com a reta que representava a velocidade do novo observador em relação ao antigo.

Isto supõe evidentemente que o novo observador está em movimento uniforme em relação ao antigo.

Para obter a Fig. V-17, eu transladei o eixo Ot da Fig. V-16 até que êle coincida com a reta que representava a velocidade do automóvel de São Paulo.

V-4-4 <u>O problema do projetil lançado verticalmente</u>.

Pegue uma pedra e lance-a verticalmente (Fig. V-18). Para cima ou para baixo, mas por favor, cuidado com os vidros de janela!

O movimento da pedra é um movimento uniformemente acelerado. A aceleração é $g = 9,81\ m/s^2$ (seção V-3-2).

Figura V-18

Representemos a velocidade inicial por $\underline{v_o}$ e orientemos a trajetória positivamente para baixo.

Se a pedra fôr lançada para cima, $\underline{v_o}$ será negativo, e o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ será como na Fig V-19: uma reta com coeficiente angular positivo proporcional a $\underline{g}$.

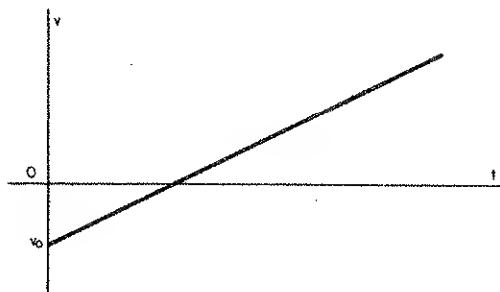



Figura V-19

Se a pedra fôr lançada para baixo, $\underline{v_o}$ será positivo e o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ será como na Fig. V-20: uma reta com o mesmo coeficiente angular que a da Fig. V-19.

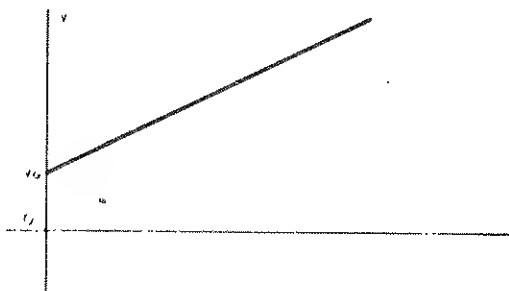



Figura V-20

Suponha agora que em vez de observar o movimento parado no chão, eu meça a posição, a velocidade, e a aceleração da pedra a partir de um ponto que parte junto com a pedra com a velocidade $\underline{v_o}$, e que anda verticalmente em movimento uniforme conservando essa mesma velocidade.

O novo gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ será obtido a partir do precedente transladando de $\underline{v_o}$ o eixo dos $\underline{t}$.

Será pois o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ da Fig. V-21.

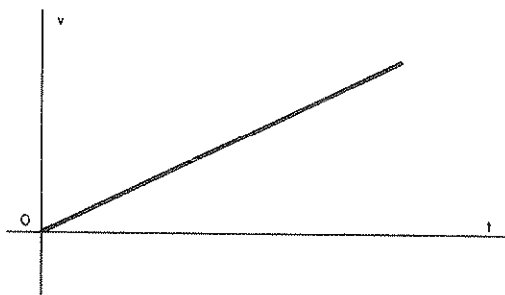



Figura V-21

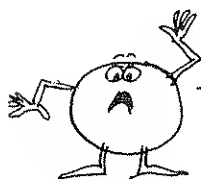
Repare que a reta que representa a velocidade da pedra passa agora pela origem.

É o gráfico que obtemos quando deixamos cair um objeto qualquer, com velocidade inicial nula. Isso às vêzes é chamado "queda livre sem velocidade inicial".

A queda livre com velocidade inicial nula é evidentemente o mais simples dos movimentos de queda.

Você vê que é sempre possível transformar qualquer movimento de queda em queda livre sem velocidade inicial.

Basta estudar o movimento a partir do ponto que sai com a mesma velocidade inicial que o projétil, e que conserva sempre essa mesma velocidade.

Isto poderá lhe ser útil no estudo de certas situações experimentais.

Esboce os gráficos s vs t correspondentes aos gráficos v vs t das Figs. V-19, V-20 e V-21.

Suponha em todos os casos que s = 0 quando t = 0.

V-5 E no entanto...

Paulo e João vão ao encontro um do outro, andando ambos a 4,0 km/h em relação à Terra. (Fig. V-22).

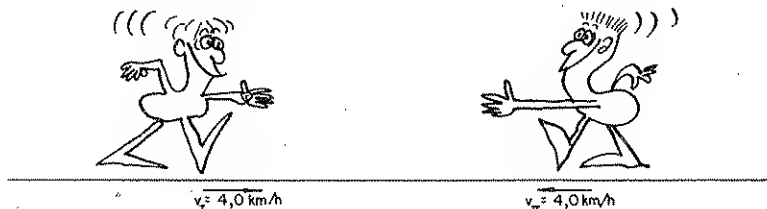



Figura V-22

Paulo vê chegar João com velocidade de 8,0 km/h.

A velocidade de João em relação a Paulo é 8,0 km/h.

O carro nº 8 e o carro nº2 vão ao encontro um do outro, andando ambos a 120km/h em relação à estrada. (Fig. V-23).

A velocidade do carro nº 2 em relação ao carro nº 8 é 240km/h.

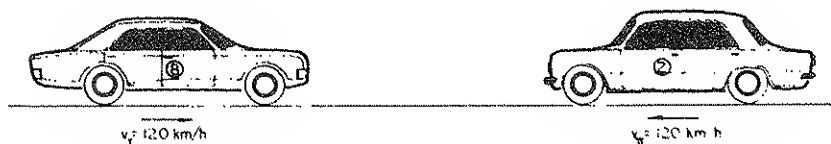



Figura V-23

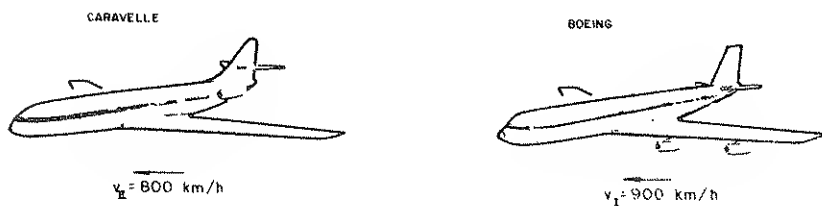



Figura V-24

O Boeing e o Caravelle seguem a mesma rota, no mesmo sentido.

O Boeing vôa a 900km/h, e o Caravelle a 800km/h.

Em relação à Terra.

Para os passageiros do Caravelle, o Boeing os está alcançando a 100 km/h.

E para os passageiros do Boeing, o Caravelle anda para trás a 100 km/h.

Tudo isto parece indiscutível. Tão simples... tão natural...

E no entanto...

E no entanto a maneira exposta acima de compor velocidades está, a rigor, errada.

A maneira certa é ensinada pela teoria da Relatividade especial.

Na Fig. V-25 o Martins está no tapete voador e observa a bola que rola sôbre a mesa.

O Martins mede a velocidade da bola e acha $\underline{v}'$.

Eu estou sentado em baixo e vejo o tapete voador passar na minha frente com velocidade V. Se eu medir a velocidade da bola eu acho $\underline{v}$.

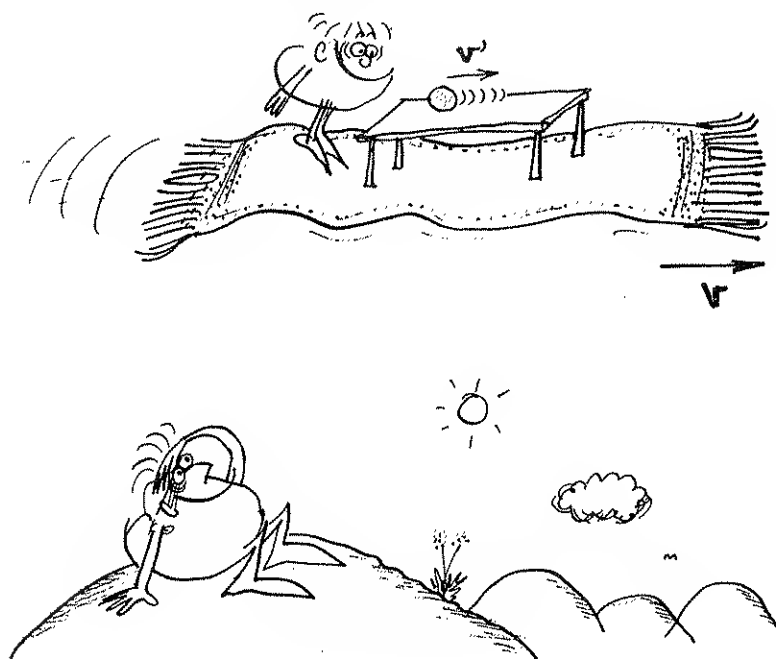



Figura V-25

Qual é a relação entre v e v'?

Somos tentados a responder: $v = v' + V$.

É o que fizemos até aqui.

E se a bola e o tapete não andarem muito, mas muito depressa mesmo aquilo está certo dentro dos limites de precisão de qualquer processo de medição.

Mas está conceitualmente errado.

A expressão certa é

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \qquad \text{(V-10)}$$

c representa a velocidade da luz no vácuo ou seja, 3×10^8 m/s (trezentos mil quilômetros por segundo).

Observe a expressão (V-10). Suponha que v' e V sejam aproximadamente iguais a 1/10c (o que não deixa de ser, assim mesmo, uma velocidade respeitável). De quanto o valor certo de v difere do valor aproximado (v' + V)?

Se v' e V forem muito menores que c, a expressão (V-10) reduz-se pràticamente a $v = v' + V$, a expressão que estamos acostumados a utilizar nas situações usuais.

Se o Martins vê a bola andar na mesa com velocidade de 3,0m/s (v') e se eu vejo o tapete passar na minha frente a 10m/s (V), então eu vejo a bola andar a 3,0 + 10 = 13m/s.

Mas se o Martins e eu estivermos em duas galáxias diferentes (Figura V-26). E se o Martins vê uma terceira galáxia afastar-se da dêle com velocidade igual a 0,4c.

E se eu vejo a galáxia do Martins afastar-se da minha com velocidade igual a 0,3c...

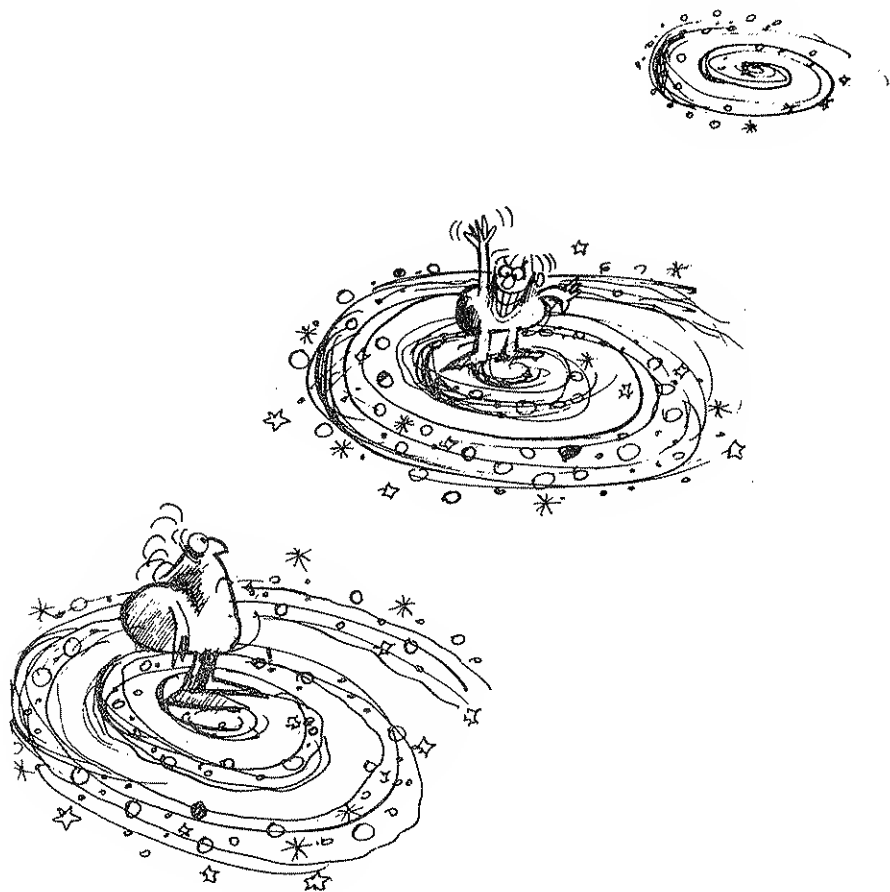



Figura V-26

Então eu vejo a Terceira Galáxia afastar-se da minha com velocidade

$$v = \frac{0,4c + 0,3c}{1 + \frac{0,4c \cdot 0,3c}{c^2}} = 0,58\underline{c}$$

e não com velocidade 0,7$\underline{c}$.

A lição que devemos retirar de tudo isto é que há sempre perigo em querer extrapolar para situações fora do comum as conclusões tiradas dos resultados de experiências comuns.

As velocidades a que estamos acostumados são muito pequenas em comparação com a velocidade da luz.

Podemos tratar essas velocidades com as regras do chamado "bom-senso".

No entanto, ao lidarmos com velocidades próximas da velocidade da luz, temos que apelar para outra cinemática.

A cinemática relativista.

As suas regras são também de "bom-senso".

Um outro bom-senso.

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula com o seu Professor).

V-1 Procure ao seu redor, na sua vida diária, movimentos uniformes.
Descreva-os.

V-2 Dois automóveis passam juntos, indo no mesmo sentido, por um marco da estrada. Ambos têm velocidade constante. Um dêles, de 80 km/h. O outro, de 120 km/h.

Qual será a distância entre os carros vinte minutos depois de passarem pelo marco?

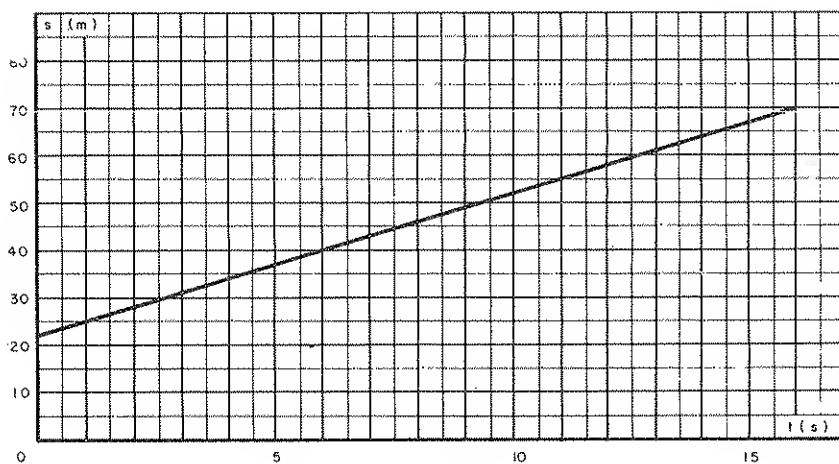
V-3 Um carro andando a 60 km/h passa por um cruzamento numa estrada. Déz minutos depois um outro carro andando a 90 km/h passa pelo mesmo cruzamento, andando no mesmo sentido.

Se os carros conservarem suas velocidades constantes, a que distância se encontrarão um do outro uma hora depois da passagem do primeiro carro pelo cruzamento?

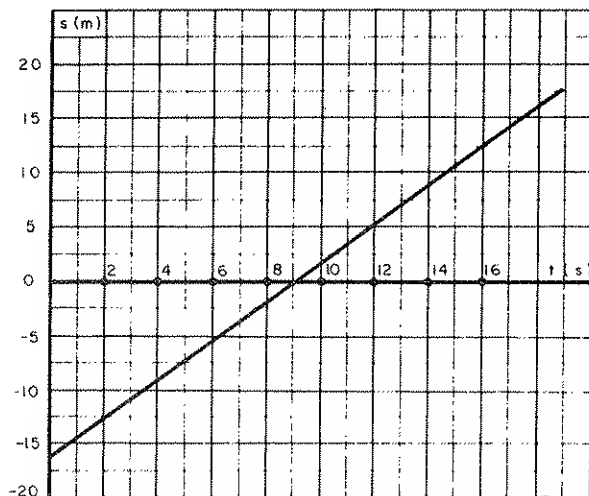
Qual dos dois estará na frente?

V-4 O gráfico do movimento de uma partícula é representado pelo gráfico da página 218.

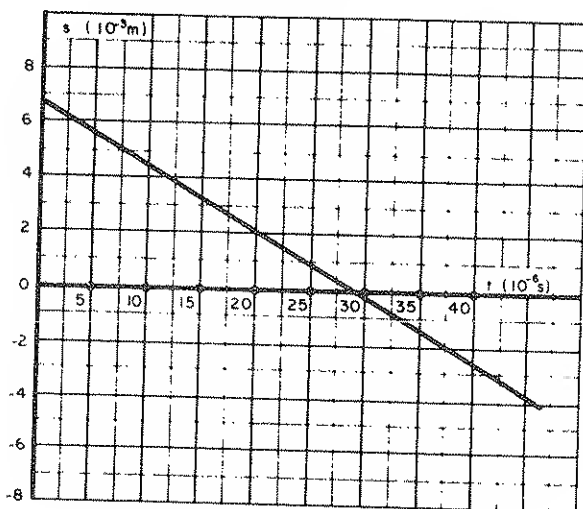
Que movimento tem a partícula?

Qual é a expressão de *s* em função de *t*?

V-5 O gráfico $\underline{a}$ vs $\underline{t}$ do movimento de uma partícula é repreaentado abaixo.

Qual é o movimento da partícula?

Qual é a expressão de $\underline{s}$ em função de $\underline{t}$?

V-6 O gráfico s vs t do movimento de uma partícula é representado abaixo.

Qual é o movimento da partícula?

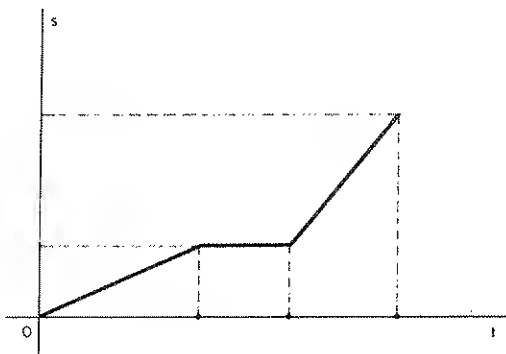
Qual é a expressão de s em função de t?

V-7 Construa em papel milimetrado os gráficos s vs t e v vs t do movimento de uma partícula, cuja equação é $s = 3,5t - 4,2$ (s em metro, t em segundo).

V-8 Construa em papel milimetrado os gráficos v vs t e s vs t do movimento de uma partícula, cuja equação é $s = 4,0t + 25$ (s em metro, t em segundo).

*V-9 O gráfico abaixo é o gráfico s vs t de um movimento.

Interprete o gráfico.

Invente o "roteiro" de um movimento que poderia ter êsse mesmo gráfico s vs t. (Qual poderia ser o móvel? De onde saiu? O que aconteceu? etc..)

Complete então, numèricamente, as escalas s e t de maneira que as distâncias percorridas, as velocidades... sejam coerentes com a história que você inventou.

V-10 Um trem sai do Rio às 9:00 à destinação de São Paulo. Êle anda à velocidade constante de 60 km/h e não para entre as duas cidades.

Outro trem sai de São Paulo às 10:00 à destinação do Rio. Êle anda à velocidade constante de 75 km/h e também não para entre as duas cidades.

A que horas e onde os dois trens se cruzam?

Resolva gràficamente.

*V-11 Numa corrida de automóveis, três carros estão parados no mesmo box: os nºs 12, 17 e 28.

O carro 28 sai, seguido um minuto depois pelo carro 12. Ambos os carros rodam com velocidade constante de 160 km/h.

O carro 17 sai finalmente do box. Êle também roda com velocidade constante.

O carro 17 leva cinco minutos (depois de sair do box) para ultrapassar o carro 12, e mais cinco minutos para ultrapassar o carro 28.

Quanto tempo depois do carro 12 o carro 17 saiu do box?

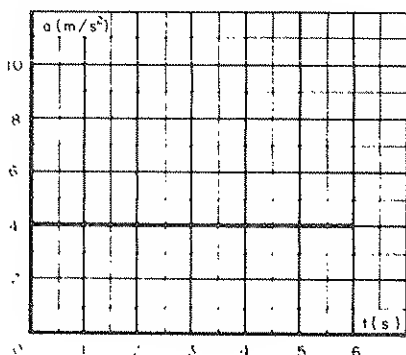
Qual é sua velocidade?

V-12 O gráfico abaixo é o gráfico a vs t do movimento de uma partícula.

Qual é o movimento da partícula?

Qual é a expressão de v em função de t, sabendo-se que em $t = 0$, $v = 0$?

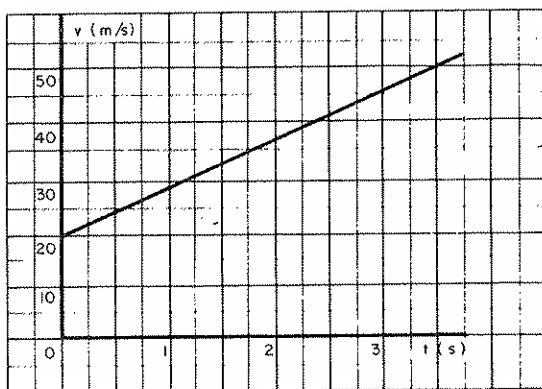
Qual é a expressão de s em função de t, sabendo-se que em $t = 0$, $s = 0$?

Construa o gráfico s vs t.

V-13 O gráfico a seguir é o gráfico v vs t do movimento de uma partícula.

Qual é o movimento da partícula?

Qual é a expressão de a em função de t?

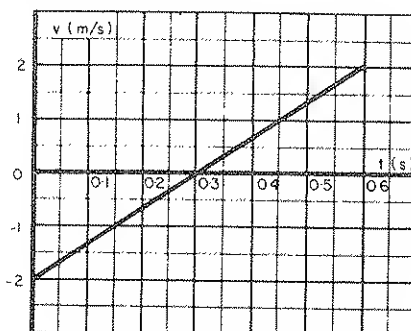
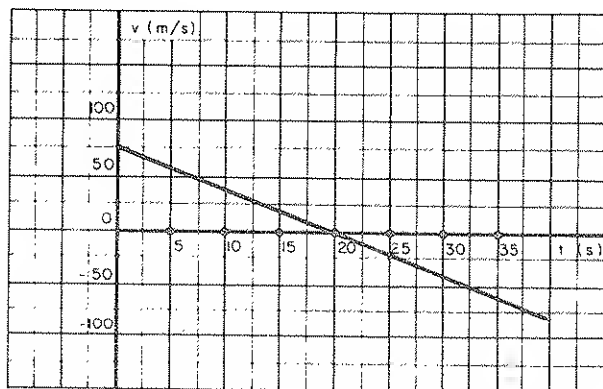
Qual é a expressão de s em função de t, sabendo-se que em $t = 0$, $s = 0$?

Construa o gráfico s vs t.

V-14 O gráfico a seguir é o gráfico v vs t do movimento de uma partícula.

Qual é o movimento da partícula?

Qual é a expressão de a em função de t?

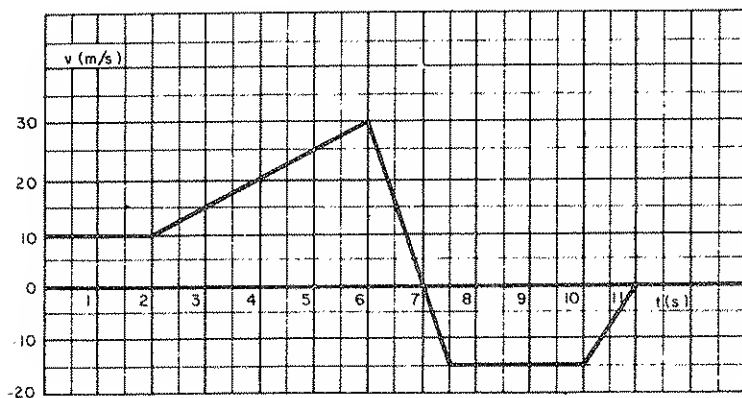
Qual é a expressão de s em função de t, sabendo-se que em $t = 0$, $s = 4{,}2$ m?

Construa o gráfico s vs t.

V-15 O gráfico abaixo é o gráfico v vs t do movimento de uma partícula. Qual é o movimento da partícula? Qual é a expressão de a em função de t? Qual é a expressão de s em função de t, sabendo-se que em t = 0, s = -20m? Construa o gráfico s vs t.

V-16 Saindo de casa com o meu automóvel, andei durante 10 segundos com aceleração constante de $2{,}0 m/s^2$, seguindo então durante um minuto com velocidade constante. Diminui a marcha, com aceleração constante, até chegar à velocidade de 40km/h. Andei durante 30 segundos com essa velocidade. Finalmente, levei 5,0 segundos até parar, tendo freado com aceleração constante.

Faça os gráficoa a vs t e v vs t do movimento.

V-17 A Figura abaixo repreaenta o gráfico v vs t do movimento de uma partícula. Caracterize o movimento nos intervalos sucessivos

0	2	s
2	6	s
6	7,5	s
7,5	10	s
10	11	s

Em cada um dos intervalos, defina velocidade e aceleração.

Construa o gráfico s vs t entre t = 0 e t = 11s.

V-18 Uma partícula tem movimento uniformemente acelerado. Em t = 1,0s a velocidade da partícula é 2,0 m/s.

Em t = 3,0s a velocidade é 6,0 m/s.

De quanto variou a posição da partícula entre êsses dois instantes?

V-19 Um ônibus trafega numa estrada com velocidade constante de 90km/h. O motorista vê um sinal passar para o vermelho quando êle se encontra a $4,0 \times 10^2$m do sinal. Êle sabe que o sinal permanece fechado durante 20 segundos. Qual é a menor deceleração que permitirá ao ônibus chegar ao sinal no instante em que êle volta ao verde?

V-20 No instante zero um carro arranca da linha de partida com aceleração constante de 2,5 m/s^2.

Quatro segundos depois outro carro arranca em perseguição do primeiro. Qual deve ser a aceleração (constante) dêsse segundo carro se êle quiser alcançar o primeiro em t = 16s?

V-21 Numa pista de provas para carros há dois marcos que distam 42m. Um carro que mantém uma aceleração constante de 3,0 m/s^2 leva 2,0s para percorrer a distância entre os dois marcos.

A que distância da linha de partida se encontra o primeiro marco?

*V-22 Viajando de automóvel, você está a 50m atrás de um caminhão, andando ambos a 72 km/h. Num trecho retilíneo da estrada você vê a oportunidade de ultrapassar, e acelera a razão de 4,0 m/s^2. Se o seu carro tem 3,0m de comprimento e o caminhão 5,0m, quanto tempo você levará para ultrapassar e se colocar a 50m na frente do caminhão?

Qual seria a resposta ao problema se a velocidade de seu carro e do caminhão antes da ultrapassagem fôsse 60 km/h?

*V-23 Da janela do quarto andar de um edifício, um colega seu segura a extre-

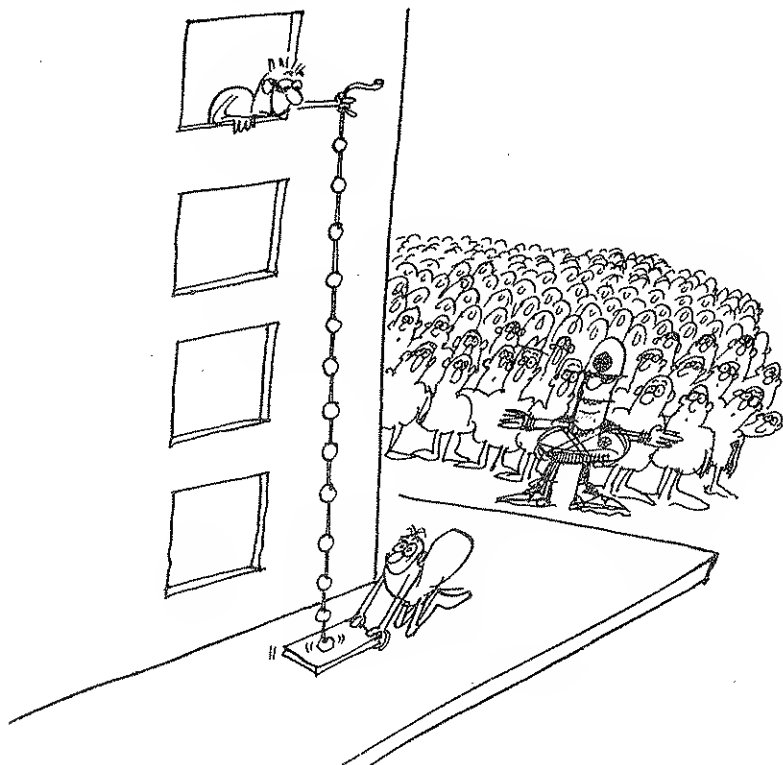
midade de uma corda ao longo da qual você fixou, de metro em metro, um chumbo ou uma pedra pequena.

Você está na calçada onde dispõe, debaixo da corda, um pedaço de tábua.

O colega larga a corda. Os chumbos caem sucessivamente sôbre a tábua.

Descreva quantitativamente o que você ouve.

Como é que você deveria dispor os chumbos ao longo da corda se você quiser ouví-los cair sôbre a tábua a intervalos de tempos iguais?

(Você pode e deve procurar realizar essa experiência!)

*V-24 Do alto de uma ponte de 20m de altura, você deixa cair uma primeira pedra sem velocidade inicial.

Um segundo depois você lança uma segunda pedra, tentando alcançar a primeira no instante em que esta atinge a superfície da água. Com que velocidade você deveria lançar a segunda pedra?

Para simplificar os cálculos tome $10 m/s^2$ como valor de g.

Diga agora se você acha possível conseguir a velocidade calculada.

V-25 Qual é a altura máxima atingida por um projétil lançado verticalmente, para cima, com velocidade inicial v_o? Em que instante é atingida essa altura máxima?

*V-26 Considere vários projéteis lançados verticalmente para cima com velocidades iniciais respectivamente iguais a 5,0 10 15 20 25 m/s.

Construa os gráficos s vs t correspondentes numa mesma fôlha de papel milimétrado, supondo as trajetórias orientadas positivamente para cima. $(g \simeq 10 m/s^2)$

Você obterá dessa maneira uma família de parábolas que passam tôdas pela origem.

Mostre que os vértices dessas parábolas se encontram todos sôbre a parábola de equação $s = 1/2\ gt^2$.

V-27 Você deixa cair uma pedra do terraço de um edifício de 20m de altura.

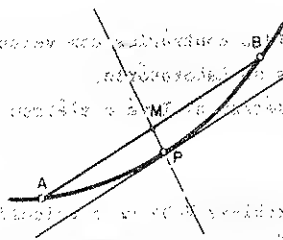
Qual é a velocidade da pedra quando ela se encontra à meia-altura? Quando ela bate no chão?

V-28 O elevador de carga de um edifício em construção sobe com velocidade constante de 1,5m/s. No instante em que êle inicia a subida, um tijolo mal colocado cai do alto do edifício, a 30m de altura.

Onde estará o elevador quando o tijolo o atingir?

$(g \simeq 10\ m/s^2)$

*V-29 Vamos ajudar a Geometria! Considere um arco AB de parábola e seja P o

ponto do arco em que a tangente é paralela à corda AB. Sendo M o meio dessa corda mostre, somente com o que você aprendeu nêste Capítulo, que o eixo da parábola é paralelo à reta PM.

*V-30 Um viaduto tem 20m de altura. Você está sôbre o viaduto e um colega seu está na estrada embaixo.

No mesmo instante você deixa cair uma pedra sem velocidade inicial, e o colega lança outra pedra verticalmente para cima.

Discuta a posição do ponto de encontro das duas pedras em função da velocidade inicial da pedra lançada pelo seu colega. ($g \simeq 10 m/s^2$).

V-31 Uma torneira defeituosa deixa gotejar água à razão de uma gôta por segundo.

Qual é a velocidade relativa de uma qualquer dessas gôtas em relação à gôta que caiu dois segundos depois dela? ($g \simeq 10 m/s^2$).

*V-32 Hoje de manhã você saiu de casa para ir ao Colégio.

Descreva a cinemática do trajeto, em têrmos de velocidades relativas a você. (Ex.: a porta da rua veio ao meu encontro com velocidade constante,... o poço do elevador subiu com velocidade de 2m/s...). Não esqueça as curvas!

V-33 Em certo momento de uma viagem de automóvel, um outro carro, que estava atrás do seu, o ultrapassa. Alguns instantes depois, você acelera e passa de novo para frente.

Descreva tudo isso em têrmos de movimento relativo do outro automóvel em relação ao seu. Decida você mesmo as velocidades (razoáveis) que intervirão no problema.

V-34 Dois elétrons andam em sentidos contrários com velocidades iguais a 0,7c. Suas velocidades são medidas no Laboratório.

Com que velocidade o elétron nº I vê o elétron nº II aproximar - se dêle?

*V-35 Qual seria a resposta ao problema V-34 se a velocidade de cada um dos elétrons, medida no Laboratório, se aproximasse cada vez mais da velocidade c?

CAPÍTULO VI

Cinemática Vetorial - I: Os Conceitos

VI-1 As limitações da Cinemática escalar.

Quando você conta a um colega que viu um trem andar a 120km/h, você não está contando a história tôda.

Seu amigo poderá perguntar-lhe: "mas para onde ia"?

A cinemática escalar pode dizer-nos de que maneira varia a posição de um móvel ao longo de uma trajetória suposta conhecida.

Mas ela não traz em si nenhuma informação quanto à geometria dessa trajetória. Sua informação tem que vir por fora.

Está faltando alguma coisa.

A Cinemática vetorial, pelo contrário, traz em si tôdas as informações da cinemática escalar e em suplemento, tôdas as informações que quisermos a respeito da trajetória.

VI-2 O vetor de posição de uma partícula.

VI-2-1 Uma experiência.

A Fig. VI-1 reproduz uma fotografia estroboscópica tomada em meu Laboratório.

Uma bola de aço desceu ao longo de uma rampa (canto superior esquerdo) e ao deixar a rampa descreveu a trajetória que você vê pontilhada pelas fotos sucessivas da bola.

Há um intervalo constante de $\frac{1}{30}$ s entre duas fotos sucessivas.

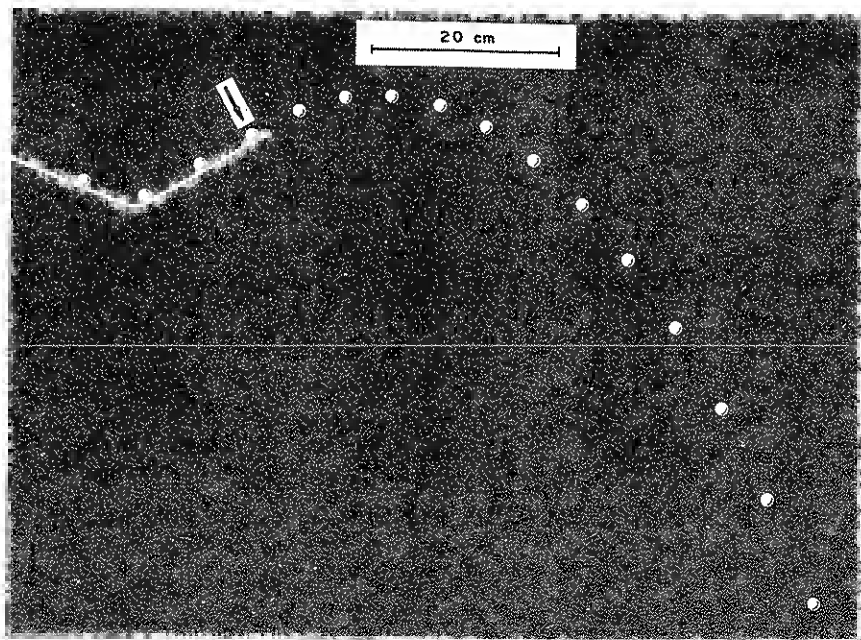



Figura VI-1

Se você vê a trajetória, como agora, ao ler êsse Capítulo, a descrição escalar do movimento lhe será sem dúvida de alguma utilidade.

Mas imagine que você queira transmitir tôdas as informações possíveis a respeito do movimento daquela bola a alguém que não conhece a trajetória.

Como é que você faria?

Vamos devagar, juntos. Você verá que não é difícil.

Eu não quero que você imagine que a descrição vetorial do movimento se prende sòmente a uma questão de curiosidade na transmissão de informações.

A razão profunda aparecerá ao procurarmos analisar as <u>causas</u> do comportamento cinemático da partícula, em Dinâmica.

VI-2-2 <u>Escôlha do referencial</u>.

A primeira coisa a fazer é escolhermos o quadro, o ambiente, em que queremos descrever o movimento.

Diz-se mais precisamente que devemos escolher o <u>referencial</u> no qual estudaremos o movimento da partícula.

O referencial é qualquer conjunto de sólidos, planos, retas..., rìgidamente ligados entre si e no qual podem ser definidas, sem ambiguidade, <u>duas</u> (referênciais bidimensionais) ou <u>três</u> (referenciais tridimensionais) direções diferentes.

Se eu quero estudar o movimento da ponta de meu lápis que está escrevendo esta <u>palavra</u>, um referencial bidimensional é suficiente: será por exemplo o referencial constituído pela fôlha em que escrevo.

O movimento da bola da Fig. VI-1 é, também, plano. Poderei escolher como referencial a própria página do livro.

Como também são planos os movimentos dos satélites artificiais, da Lua, dos planêtas.

Todos êsses movimentos serão estudados em referênciais planos.

Mas o vôo dos passarinhos, o movimento de um carro que sobe e desce ladeiras, e faz curvas, são movimentos tridimensionais.

Êles deverão ser estudados em referênciais tridimensionais.

Nêste primeiro Curso estudaremos, sòmente, movimentos bidimensionais.

Nossos referênciais serão, sempre, planos.

VI-2-3 Eixos associados a um referencial.

Uma vez fixado o referencial, temos que escolher nêle duas (três no espaço) direções fixas cuja utilidade aparecerá logo mais.

Você já sabe fazer isto.

Basta construir dois eixos coordenados retangulares Ox e Oy, como na seção III-3 do Capítulo III. (Fig. VI-2).

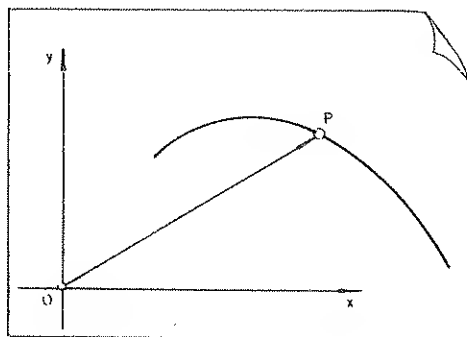



Figura VI-2

A disposição do sistema de eixos no referencial é arbitrária.

Não me refiro a uma translação.

Uma translação dos eixos não tem nenhum efeito sôbre as medidas que efetuaremos.

Refiro-me a uma rotação.

Em princípio você pode apontar o eixo Ox (eixo das abscissas, lembra-se?) em qualquer direção.

Mas em certos problemas, a Física impõe, por assim dizer, uma direção privilegiada.

É o caso, no problema da bola (Fig. VI-1).

A aceleração da bola é vertical.

Em consequência, é de se supor que a escôlha de um eixo vertical simplificará o estudo do problema.

Na Fig. VI-2, escolhi o eixo Oy (eixo das ordenadas) vertical.

Seguindo-se que o eixo das abscissas é horizontal.

VI-2-4 Origem.

Escolhidos os eixos associados ao referencial, marco um ponto qualquer no plano: êsse ponto O será a origem das posições (vetoriais) da partícula.

Não há nada que restrinja a liberdade de escôlha da origem. Muitas vêzes, ela é tomada no ponto de interseção dos eixos.

Mas sendo arbitrária a posição dêsses eixos no plano, a posição da origem o é também.

VI-2-5 Posição vetorial da partícula: vetor de posição.

Tudo pronto, agora, para falarmos da posição vetorial da partícula.

Suponha que no instante t a bola esteja na posição P representada na Fig. VI-2.

Como vou medir essa posição?

Poderei dizer: no instante t a partícula dista 4m da origem. Mas, obviamente, isto não é suficiente. Há uma infinidade de pontos que distam 4m da origem.

No entanto, se eu lhe disser: você encontrará a posição P se andar 3,5m a partir de 0 ao longo e no sentido de Ox, e a seguir 2,0m paralelamente a Oy e no mesmo sentido, então, não há dúvida que você encontrará <u>mesmo</u> a posição da partícula.

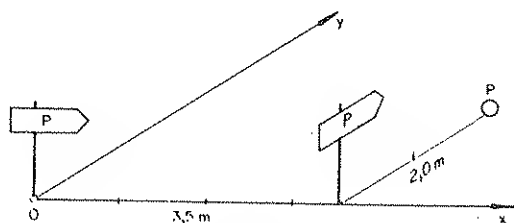



Figura VI-3

MARTINS E EU

Assim é que dois números são necessários para medir a posição da partícula no plano.

Êsses números são números algébricos.

Pois, nada mais são que as coordenadas da partícula em relação ao Sistema de eixos escolhidos, multiplicados pelos devidos fatores de escala.

A partir de agora, os dois números que medem a posição de uma partícula serão escritos um em baixo do outro, em coluna.

O número correspondente à abscissa em cima; o número correspondente à ordenada em baixo.

A êsse conjunto daremos o nome de vetor de posição da partícula no instante em que medimos.

E representaremos convencionalmente êsse vetor de posição pelo símbolo $\vec{r}$.

A posição vetorial de uma partícula no plano é medida pelo vetor de posição correspondente.

Eu explico por um exemplo.

No problema da bola (Fig. VI-1) eu escolho como origem a posição da partícula assinalada por uma seta.

Em princípio, eu escolheria a posição da partícula no instante em que ela deixa a rampa para iniciar seu movimento de queda livre.

Pois é êsse último movimento que me interessa.

Infelizmente, a máquina não registrou essa posição. Contento-me, então, com a posição registrada fotogràficamente, mais próxima da desejada.

Os eixos são, respectivamente, um eixo horizontal orientado positivamente para a direita (eixo 0x) e um eixo vertical orientado positivamente para cima (eixo 0y).

Pois bem, agora tome uma fôlha de papel transparente e marque, nessa fôlha as posições sucessivas da bola, contando zero na origem, um na posição seguinte, etc...

Assinale a origem e construa os seus eixos.

A seguir determine os fatôres de escala que vão transformar as distâncias medidas no papel, em distâncias em verdadeira grandeza.

Está pronto?

Então meça comigo as coordenadas da posição *três*.

Acho +15cm e 5,0cm.

Escrevo

$$\vec{r}_3 = \binom{15}{5,0} \qquad (\text{cm})$$

Para a posição *seis*, eu acho +30cm e -2,7cm.

Então

$$\vec{r}_6 = \binom{30}{-2,7} \qquad (\text{cm})$$

Da mesma forma

$$\vec{r}_9 = \binom{45}{-20} \qquad (\text{cm})$$

e

$$\vec{r}_{12} = \binom{61}{-50} \qquad (\text{cm})$$

De um modo geral, seja $\vec{r}$ a posição da partícula no instante *t*. Escreveremos

$$\vec{r} = \binom{x}{y} \qquad \text{(VI-1)}$$

VI-2-6 <u>Componentes do vetor de posição.</u>

Os números <u>x</u> e <u>y</u> são por definição as <u>componentes</u> do vetor de posição $\vec{r}$.

As componentes do vetor $\vec{r}_3$ são respectivamente 15cm e 5,0cm.

As componentes do vetor $\vec{r}_{12}$ são 61cm e -50cm.

Lembre-se: enuncie sempre em primeiro a componente -<u>x</u> e a seguir a componente -<u>y</u>.

VI-2-7 <u>Representação do vetor de posição por um segmento orientado.</u>

Essa história de vetor de posição é talvez um pouco abstrata para seu gôsto.

Eu a acho abstrata.

Gosto de <u>ver</u> as coisas. Talvez você seja como eu.

Então procuremos algo que nos ajude.

Olhe para a Fig. VI-4.

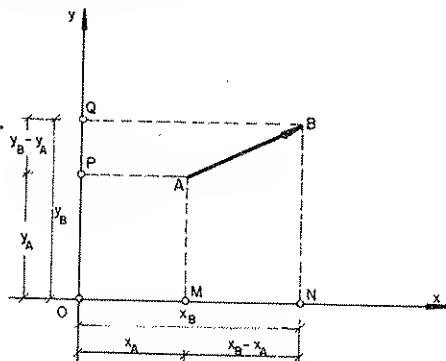



Figura VI-4

Representa o Sistema de eixos (0x 0y) e dois pontos A e B, cujas coordenadas são respectivamente $\{X_A\ Y_A\}$ e $\{X_B\ Y_B\}$.

Construamos o segmento AB e orientemo-lo, convencionalmente, da <u>origem A</u> para a <u>extremidade B</u>.

(Poderíamos ter escolhido a origem em B e a extremidade em A. O segmento seria então orientado de B para A).

Temos assim um <u>segmento orientado</u>.

Representamos êsse segmento pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$.

Projetemos A e B sôbre os eixos.

As projeções $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são respectivamente medidas pelos números algébricos $(X_B - X_A)$ e $(Y_B - Y_A)$.

Repare que o número que mede $\overrightarrow{MN}$ é a diferença entre a abscissa da extremidade e a abscissa da origem do segmento.

E o número que mede $\overrightarrow{PQ}$ é a diferença entre a ordenada da extremidade e a ordenada da origem.

Representemos $\overrightarrow{MN}$ por X e $\overrightarrow{PQ}$ por Y:

$$X = X_B - X_A$$
$$Y = Y_B - Y_A \qquad \text{(VI-2)}$$

A cada segmento orientado tal que $\overrightarrow{AB}$ corresponde o par {X Y} formado por suas projeções.

E diremos que dois segmentos orientados são iguais se êles têm as mesmas projeções X e Y.

Nessas condições, a cada par de números algébricos {X Y} corresponde <u>um</u> segmento orientado.

Voltemos agora à Física.

O vetor de posição $\vec{r}$ mede a posição vetorial de uma partícula.

Êsse vetor é definido pelo par de componentes <u>x</u> e <u>y</u> cujo conjunto mede a posição da partícula.

Em consequência, podemos representar gràficamente a posição vetorial

$\vec{r}$ da partícula, grandeza física, pelo segmento orientado $\overrightarrow{OP}$, ser matemático.

Ou por qualquer segmento paralelo a $\overrightarrow{OP}$, de mesmo sentido e de mesmo comprimento. Como por exemplo $\overrightarrow{AB}$.

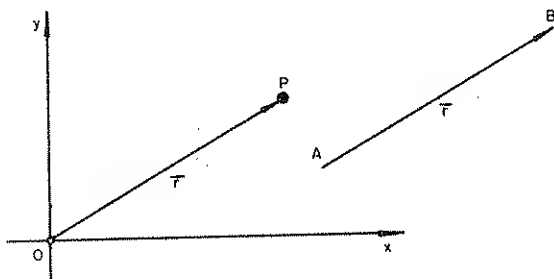



Figura VI-5

Mas por favor...

Mas por favor, não esqueça que posição vetorial de uma partícula não é um segmento orientado.

Não é uma seta.

A posição vetorial é representada por uma seta, por um segmento orientado.

Se você se der o trabalho de refletir por algums instantes, há de convir que o arco-iris não é um conjunto de letras: um a seguido de um r, seguido de um c...

Como tampouco é um conjunto de sons.

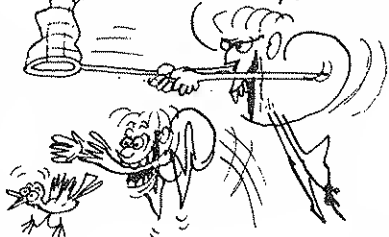
E Brasil não é aquela grande mancha verde no continente Sul-Americano.

E Paz não é uma pomba com um ramo de oliveira no bico.

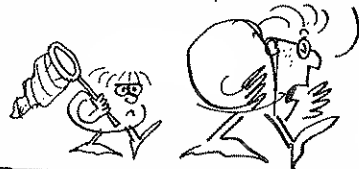
E foi exatamente nêsse ponto da aula que o Martins manifestou-se de nôvo.

MARTINS E EU

MAS PORQUE REPRESENTAM A POSIÇÃO POR UM SEGMENTO ORIENTADO, POR UMA RETA? PORQUE NÃO POR UMA MANCHA COLORIDA OU UMA POMBA? PODEMOS REPRESENTÁ-LA POR QUALQUER COISA?

NÃO PODE, MARTINS. VOCÊ TEM QUE REPRESENTAR POR ALGO QUE SE COMPORTE EM QUALQUER CIRCUNSTÂNCIA COMO A POSIÇÃO...

NÃO ENTENDO PROFESSOR!

EU ENTENDO QUE VOCÊ NÃO ENTENDA, MARTINS. DIGAMOS O SEGUINTE: AS POSIÇÕES VETORIAIS FORMAM UMA FAMÍLIA. E UMA FAMÍLIA TEM REGRAS. SÓ SE PODEM REPRESENTAR AS POSIÇÕES VETORIAIS POR MEMBROS DE OUTRA FAMÍLIA QUE OBEDEÇAM AS MESMAS REGRAS!

HA HA
HA HA HA
HA HA

QUER DIZER QUE AS POSIÇÕES VETORIAIS SEGUEM REGRAS?

SEGUEM MARTINS! E VAMOS, DAQUI A POUCO APRENDER A MAIS IMPORTANTE DE TÔDAS!

VI-2-8 <u>Módulo e direção</u>.

Volte à fotografia da bola que cai (Fig. VI-1).

A Fig. VI-6 reproduz o vetor de posição $\overrightarrow{r_{10}}$ da posição <u>dez</u> da bola. As medidas fornecem

$$\overrightarrow{r_{10}} = \binom{50}{-29} \quad (\text{cm}).$$

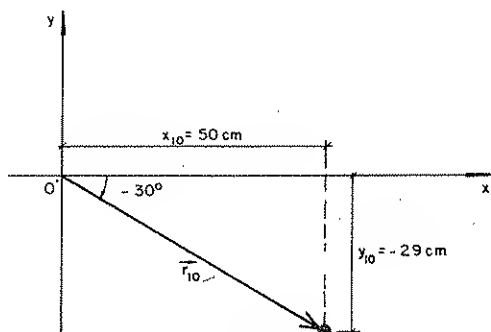



Figura VI-6

Traduza isto em Português: no "instante... as coordenadas da bola eram... e....

Naquêle instante, qual era a distância da bola até à origem?

É fácil. Sendo d_{10} a distância:

$$d_{10} = \sqrt{x_{10}^2 + y_{10}^2} = \sqrt{(50)^2 + (-29)^2} = 58 \text{ cm}$$

Lembre-se: o quadrado da hipotenusa...

Òbviamente, a distância da origem até a bola é proporcional ao comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{OP}$.

De modo que, o comprimento do segmento associado fornece uma infor-

mação a respeito da grandeza representada pelo segmento.

No caso da posição vetorial, essa informação é: distância da partícula à origem.

No entanto, estaremos, em breve, representando outras grandezas por segmentos orientados.

A informação fornecida pelo comprimento do segmento não será mais uma distância.

Para falar sempre a mesma linguagem, chamaremos essa informação do têrmo geral de módulo.

Representaremos o módulo da posição $\vec{r}$ pelo símbolo $|\vec{r}|$.

Analìticamente:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(VI-3)}$$

O módulo da posição vetorial indica a distância da partícula à origem.

Òbviamente, o módulo, sòzinho, é incapaz de definir a posição da partícula.

Dizer que em $t = 10 \times 1/30 = 0{,}33$s a bola distava 58cm da origem é insuficiente.

Pois há uma infinidade de pontos que distam 58 cm da origem.

Está faltando um elemento: o elemento direção.

A partícula dista 58 cm da origem, certo. Mas em que direção se encontra?

A Fig. VI-5 dá também a resposta.

O segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ faz um ângulo de 30^o com o eixo Ox e <u>para baixo</u>.

Como você já tem algumas noções de Trigonometria, já se adiantou e está para dizer (como o Martins, aliás, que já está fazendo sinais desespera-

dos), que o segmento $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo Ox o ângulo de -30^{o}.

Êsse ângulo define a direção em que se encontra a partícula.

Como foi que achei êsse ângulo? É muito simples: eu medi-o com um transferidor, na Fig. VI-5.

Atenção! A medição do ângulo com o transferidor é sòmente válida se você tomou uma precaução fundamental ao fazer a Figura.

Qual é?

Se você não consegue descobrir a resposta, pergunte ao seu Professor!

Mas há também outro meio. A partir das componentes x e y, a Figura VI-6 mostra que, sendo θ o ângulo com o eixo Ox do segmento orientado $\overrightarrow{OP}$:

$$tg\theta = \frac{y}{x} \qquad (VI-4)$$

Façamos as contas no caso particular de $\overrightarrow{r_{10}}$:

$$tg\theta_{10} = -\frac{29}{50} = -0,58$$

Uma tábua me fornece $\theta = 29^{o}20'$.

A medida com o transferidor não foi tão mal assim.

Módulo e direção: dois elementos essenciais à determinação da posição da partícula.

Mais uma vez dois números.

Duas informações fornecidas também pelas componentes x e y do vetor de posição.

Aproveitemos a oportunidade para resumir em algumas linhas os elementos de correspondência entre o vetor de posição e o segmento orientado associado:

Grandeza física		Representação gráfica
vetor $\vec{r}$	$\longrightarrow$	segmento $\overrightarrow{OP}$ ou qualquer outro igual.
componentes: x,y	$\longrightarrow$	projeções: X,Y
módulo $\lvert\vec{r}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\longrightarrow$	comprimento $\lvert\overrightarrow{OP}\rvert = \sqrt{X^2 + Y^2}$

Para passar das projeções do segmento orientado às componentes do vetor de posição, você multiplicará as projeções pelo fator de escala conveniente.

Como fizemos, você e eu, ainda há pouco, ao calcularmos as componentes de $\vec{r_3}$, $\vec{r_6}$ etc... na seção VI-2-5.

A correspondência: "comprimento de $\overrightarrow{OP}$ —— módulo de $\vec{r}$" se opera com o mesmo fator.

VI-3 Operação fundamental com os vetores de posição: adição.

A Fig. VI-7 reproduz as posições sucessivas da bola da fotografia VI-1.

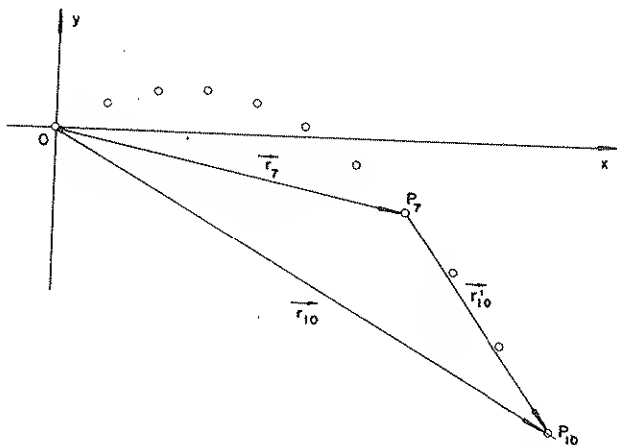



Figura VI-7

Considere a posição dez da bola, assinalada por $\vec{P}_{10}$.

O vetor de posição $\vec{r}_{10}$ é representado pelo segmento $\overrightarrow{OP}_{10}$.

$$\vec{r}_{10} = \binom{50}{-29} \quad (\text{cm}).$$

Suponha agora que em vez de escolhermos como origem o ponto O, escolhemos o ponto P_7 (por exemplo). O novo vetor de posição $\vec{r}\,'_{10}$ é representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{P_7P_{10}}$; e temos

$$\vec{r}\,'_{10} = \binom{14}{-23{,}4} \quad (\text{cm}).$$

Você deverá verificar essa medida. Se achar mais fácil, faça passar dois novos eixos paralelos aos primeiros pelo ponto P_7.

Por outro lado a posição sete é medida em relação à origem O pelo vetor $\vec{r}_7$ e representada pelo segmento $\overrightarrow{OP}_7$. Temos

$$\vec{r}_7 = \binom{86}{-5{,}6} \quad (\text{cm}).$$

Ora, você observa que

$$50 = 36 + 14 \quad \text{e} \quad -29 = (-5{,}6) + (-23{,}4)$$

A componente - x do vetor $\vec{r}_{10}$ é igual à soma da componente - x do vetor $\vec{r}_7$ e da componente - x do vetor $\vec{r}\,'_{10}$.

A componente - y do vetor $\vec{r}_{10}$ é igual à soma das componente - y do vetor $\vec{r}_7$ e da componente - y do vetor $\vec{r}\,'_{10}$.

Escreveremos para abreviar

$$\binom{50}{-29} = \binom{36}{-5{,}6} + \binom{14}{-23{,}4}$$

ou

$$\vec{r}_{10} = \vec{r}_7 + \vec{r}\,'_{10}$$

Diremos que o vetor $\vec{r}_{10}$ é a soma dos vetores $\vec{r}_7$ e $\vec{r}\,'_{10}$.

Você já entendeu a regra do jôgo: cada uma das componentes da soma

é igual à soma das componentes de mesmo nome das parcelas.

Vamos agora à representação geométrica, pelos segmentos orientados.

Será que podemos considerar o segmento $\overrightarrow{OP}_{10}$ como a soma dos segmentos $\overrightarrow{OP}_7$ e $\overrightarrow{P_7P}_{10}$?

Acho que sim. Porque veja, podemos considerar o segmento orientado $\overrightarrow{OP}_{10}$ como indicando o deslocamento de um ponto (a extremidade do lápis por exemplo) que iria em linha reta, na página do livro, do ponto 0 ao ponto P_{10}.

Da mesma forma, o segmento $\overrightarrow{OP}_7$ indica um deslocamento em linha reta de 0 até P_7.

E $\overrightarrow{P_7P}_{10}$ indica o deslocamento em linha reta do ponto P_7 ao ponto P_{10}.

Ora, em vez de ir, diretamente, de 0 até P_{10}, eu posso passar primeiro por P_7.

Eu vou de 0 até P_7, e a seguir de P_7 até P_{10}.

O resultado é o mesmo, não é? Eu estou, finalmente, em P_{10}.

Concluo que o deslocamento direto de 0 até P_{10} é equivalente, quanto à posição final, à sucessão do deslocamento direto de 0 até P_7, e do deslocamento direto de P_7 até P_{10}.

É exatamente isso que significa a igualdade

$$\overrightarrow{OP}_{10} = \overrightarrow{OP}_7 + \overrightarrow{P_7P}_{10}$$

E eu tenho, agora, a correspondência:

$$\vec{r}_{10} = \vec{r}_7 + \vec{r}\,'_{10} \longrightarrow \overrightarrow{OP}_{10} = \overrightarrow{OP}_7 + \overrightarrow{P_7P}_{10}$$

É, precisamente, por causa disto que pude desde o início representar vetores de posição por segmentos orientados.

Vetores de posição e segmentos orientados pertencem a "clubes" diferentes.

Mas os dois "clubes" têm o mesmo regulamento.

Passemos do caso particular ao caso geral.

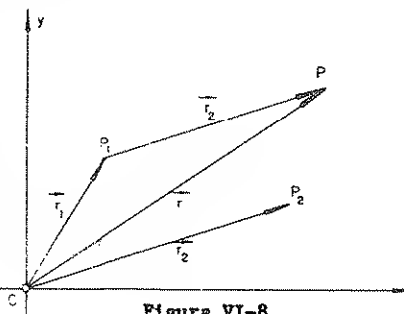



Figura VI-8

Suponhamos que dois vetores de posição sejam definidos por

$$\vec{r}_1 = \binom{x_1}{y_1} \qquad \vec{r}_2 = \binom{x_2}{y_2}$$

Os segmentos orientados associados são

$$\overrightarrow{OP}_1 \text{ e } \overrightarrow{OP}_2 \text{ (Fig. VI-7)}$$

Ou $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{P_1P}$, sendo $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP}_2$. (Observe que $\overrightarrow{OP}_2$ e $\overrightarrow{P_1P}$ são paralelos, de mesmo sentido e de mesmo comprimento).

O segmento $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos segmentos orientados $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{P_1P}$, ou $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$. (*)

O segmento $\overrightarrow{OP}$ representa à soma $\vec{r}$ dos vetores de posição $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$.

Temos

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \longrightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{cases} \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 \\ \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P}_2 \end{cases} \qquad \text{(VI-5)}$$

As componentes x e y de $\vec{r}$ são definidas por

$$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \qquad \text{(VI-6)}$$

Ao vetor soma $\vec{r}$ podemos somar um terceiro vetor $\vec{r}_3$; a nova soma um quarto vetor $\vec{r}_4$ etc...

De um modo geral as componentes x e y da soma de n vetores

$$\vec{r}_1 \; \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_n$$

serão definidas por

$$\binom{x}{y} = \binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} + \ldots + \binom{x_n}{y_n} = \binom{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \qquad \text{(VI-7)}$$

(*) Se, na figura VI-8, você construir o segmento P_2P, você obterá o paralelograma OP_1PP_2. A diagonal OP coincide gràficamente com a soma de $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$. Daí o nome de "regra do paralelograma" dado a essa construção da soma.

Ou, de modo um pouco mais aofisticado.

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-8)}$$

O símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ não tem nada de cabalístico!

Você lerá: "Soma de i = 1 até i = n "de x_i (ou de y_i)".

Na representacão geométrica, a Fig. VI-9 fala por si:

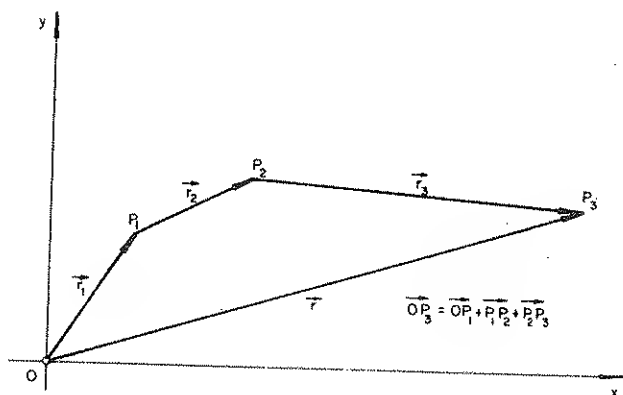



Figura VI-9

Finalmente, uma palavra de aviso.

Você pode somar quaisquer dois segmentos orientados. A soma tem sempre um sentido geométrico.

Mas você não pode somar sem mais nem menos dois vetores de posição quaisquer.

Ou você está arriscado a ter nas mãos algo que não tem nenhum sentido físico.

O que seria difìcilmente perdoável.

A êsse respeito, estude cuidadosamente o Problema VI-15.

E debata o assunto em aula com o seu Professor.

VI-4 Velocidade vetorial: vetor velocidade.

VI-4-1 Velocidade vetorial média.

A Fig. VI-10 reproduz, mais uma vez, a fotografia da Fig. VI-1.

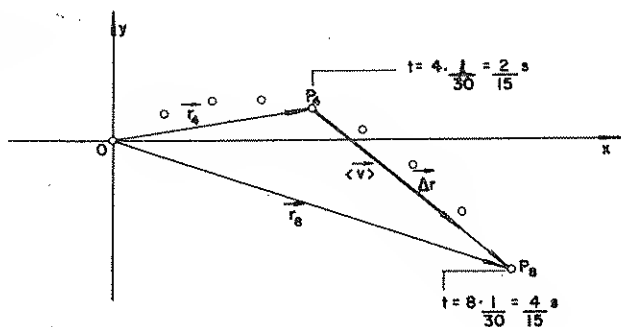



Figura VI-10

Observe o vetor de posição $\vec{r}_4$. Em t = 4 x 1/30 = 2/15s, a partícula está em P_4.

2/15s depois ela está em P_8.

O vetor de posição correspondente é $\vec{r}_8$.

Entre os instantes 2/15s e 4/15s a posição vetorial da partícula variou de $\overrightarrow{\Delta r}$, representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{P_4P_8}$.

Com efeito a figura lhe mostra que

$$\vec{r}_8 = \vec{r}_4 + \overrightarrow{\Delta r}, \quad e \quad \overrightarrow{OP}_8 = \overrightarrow{OP}_4 + \overrightarrow{P_4P_8}$$

A taxa de variação média da posição vetorial, no intervalo

$$\Delta t = 4/15 - 2/15 = 2/15s$$

que se inicia em t = 2/15s, é $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$.

Por definição essa taxa de variação média é chamada <u>velocidade vetorial média</u>, representando-se pelo símbolo $<\vec{v}>$:

$$<\vec{v}> \equiv \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \qquad \text{(VI-9)}$$

Mas o que significa exatamente dividir um vetor por um número (ou multiplicá-lo pelo seu inverso)?

Passemos à representação geométrica. Será mais fácil.

Na Fig. VI-11 um segmento $\overrightarrow{OP}$ está dividido por 3. A têrça parte de $\overrightarrow{OP}$ é o segmento $\overrightarrow{OQ}$ de mesma direção e mesmo sentido que $\overrightarrow{OP}$, e cujo comprimento é 1/3 do comprimento de $\overrightarrow{OP}$: $\overrightarrow{OQ} = 1/3\ \overrightarrow{OP}$.

A Fig. VI-12 representa o segmento $\overrightarrow{OQ} = -1/3\ \overrightarrow{OP}$.

Você vê a diferença entre a divisão por um número positivo e a divisão por um número negativo.

Quais são as coordenadas de Q?

Se (x y) são as coordenadas de P, então as coordenadas de Q são

(1/3 x 1/3 y).

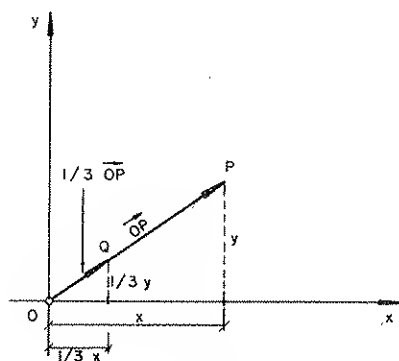



Figura VI-11

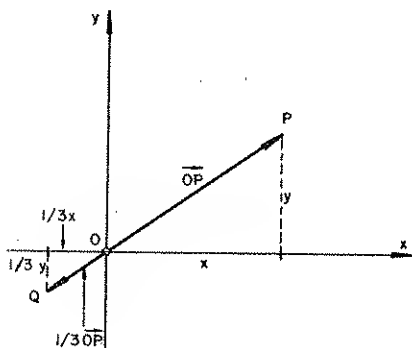



Figura VI-12

Podemos agora afirmar que ao dividirmos um vetor por um escalar, dividimos pelo escalar as componentes do vetor.

A multiplicação por um escalar é análoga.

A Fig. VI-13 mostra o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, que poderá representar um vetor de posição por exemplo.

As projeções de $\overrightarrow{AB}$ são X e Y.

O segmento $\overrightarrow{A'B'}$ cujas projeções são 2X e 2Y é igual a duas vêzes o segmento $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{A'B'} = 2\ \overrightarrow{AB}$$

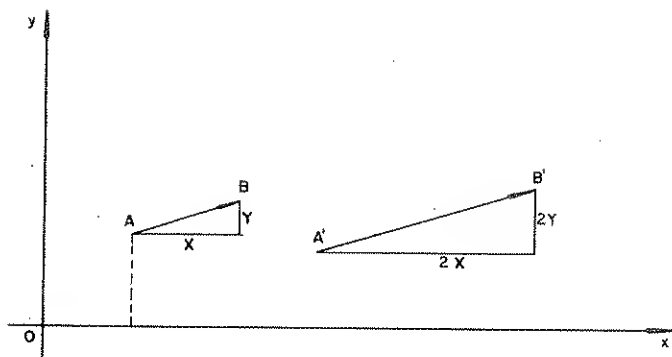



Figura VI-13

Repare que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{A'B'}$, conforme já assinalado, ocupam uma posição qualquer no plano.

Sòmente importam a direção, o sentido, e o comprimento.

Procuremos as componentes da velocidade vetorial média.

Sendo $\vec{r}_4 = \binom{x_4}{y_4}$ e $\vec{r}_8 = \binom{x_8}{y_8}$,

o vetor $\overrightarrow{\Delta r}$ é tal que $\binom{x_8}{y_8} = \binom{x_4}{y_4} + \overrightarrow{\Delta r}$,

o que mostra que $\overrightarrow{\Delta r} = \binom{x_8 - x_4}{y_8 - y_4} = \binom{\Delta x}{\Delta y}$

Então a velocidade média é

$$\vec{\langle v \rangle} \equiv \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-10)}$$

Na Fig. VI-9 você verificará que

$$\Delta x \; (= x_3 - x_4) = 20\text{cm}$$

$$\Delta y \; (= y_8 - y_4) = -16{,}2\text{cm}$$

A velocidade vetorial média no intervalo (2/15s 4/15s) é

$$\vec{\langle v \rangle} = \begin{pmatrix} \frac{20}{2/15} \\ -\frac{16{,}2}{2/15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \times 10^2 \\ -1{,}2 \times 10^2 \end{pmatrix} \quad \text{(cm/s)}$$

O módulo da velocidade média é

$$|\vec{\langle v \rangle}| = \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2} \qquad \text{(VI-11)}$$

No nosso exemplo

$$|\vec{\langle v \rangle}| = 1{,}9 \times 10^2 \text{ cm/s}$$

A Fig. VI-10 mostra o vetor $\vec{\langle v \rangle}$ representado por um segmento orientado de mesma direção e mesmo sentido que o segmento $\overrightarrow{P_4P_8}$.

Na Fig. VI-10 o segmento que representa $\vec{\langle v \rangle}$ é mais curto que o segmento que representa $\vec{\Delta r}$.

Poderia ser mais comprido?

Ou de mesmo comprimento?

(Isto também merece uma discussão em aula).

Paremos um instante.

Na seção anterior (seção VI-3) representamos <u>vetores de posição</u> por

segmentos orientados.

Nesta seção estamos representando <u>velocidades vetoriais médias</u> por segmentos orientados.

Chamei sua atenção sôbre o fato de que posições vetoriais <u>não são</u> segmentos orientados.

Da mesma forma, velocidades vetoriais <u>não são</u> segmentos orientados, embora possam ser representados por êles.

Mais um clube com o mesmo regulamento.

VI-4-2 <u>Velocidade vetorial instantânea</u>.

O que acontece ao calcularmos a velocidade vetorial média sôbre intervalos de tempo que se iniciam sempre em $t = 2/15s$ mas que vão diminuindo cada vez mais?

O que acontece à velocidade média?

Bem, vejamos.

Na Fig. VI-14 representei o vetor velocidade média, no intervalo $(t_1\ t_2)$ de um movimento qualquer.

As posições correspondentes da partícula são P_1 e P_2.

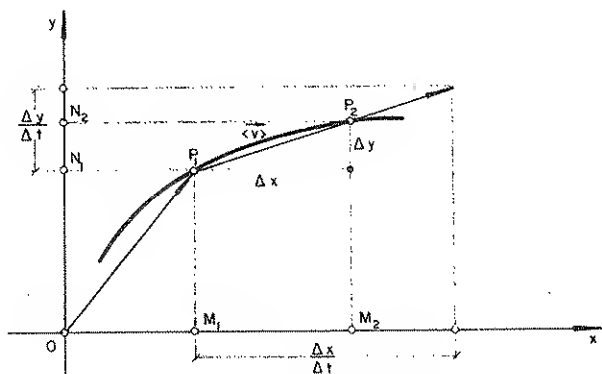



Figura VI-14

Sejam M_1 e N_1 as projeções da posição P_1 sôbre os eixos.

A abscissa de M_1 é x.

No intervalo Δt a partir de $t = t_1$ a projeção da partícula sôbre Ox se desloca até M_2, projeção de P_2. E $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta x$.

Nêsse interv-- velocidade escalar média daquela projeção é

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

É a componente - x da velocidade vetorial média da partícula.

Da mesma forma, a componente - y dessa velocidade é a velocidade escalar média da projeção da partícula sôbre o eixo Oy.

Quando tornamos Δt cada vez menor, mas começando sempre em $t = t_1$, $\Delta x/\Delta t$ tende para a velocidade escalar instantânea, no instante $t = t_1$, da projeção da partícula sôbre o eixo Ox.

$\Delta y/\Delta t$ tende para a velocidade escalar instantânea, no instante $t = t_1$, da projeção da partícula sôbre o eixo Oy.

Vamos escrever isto mais uma vez. É muito importante.

Quando Δt tende a zero, as componentes do vetor velocidade média tendem respectivamente para os valores de dx/dt e dy/dt no início do intervalo.

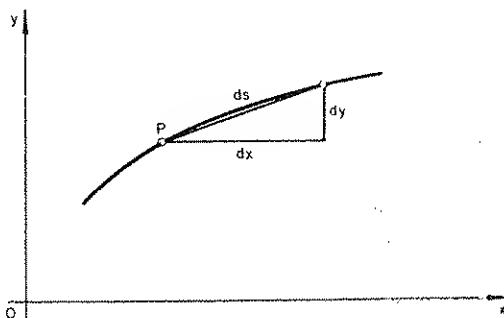



Figura VI-15

O módulo do vetor velocidade média tende para

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt}$$

Mas veja a Fig. VI-15: a partícula está em P no instante t.

A partir dêsse instante, e no intervalo extremamente pequeno dt, suas coordenadas vão variar, respectivamente, de dx e dy.

O arco $|ds|$ de trajetória percorrido pela partícula se confunde, pràticamente, com a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são dx e dy.

E temos

$$|ds| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Ah! Então o limite do módulo da velocidade vetorial média é igual ao valor absoluto da velocidade escalar instantânea.

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\langle\vec{v}\rangle| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \tag{VI-12}$$

Ao limite da velocidade vetorial média, dá-se o nome de <u>velocidade vetorial instantânea</u>.

A velocidade vetorial instantânea se representa pelo símbolo $\vec{v}$.

Já sabemos que

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \left|\frac{ds}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \tag{VI-13}$$

E o segmento orientado que representa $\vec{v}$?

É, obviamente, o limite do segmento orientado que representa $\langle\vec{v}\rangle$.

Ora $\langle\vec{v}\rangle$ é representado por um segmento orientado cujo suporte é a <u>corda</u> definida pelas posições da partícula nos instantes <u>t</u> e <u>t + Δt</u>. (Figura VI-16).

Quando Δt se torna muito pequeno, a direção dessa corda tende para a direção da <u>tangente em P à trajetória</u>.

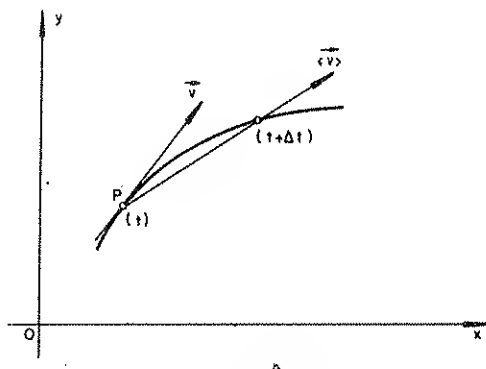



Figura VI-16

O segmento orientado que representa a velocidade instantânea tem como suporte a tangente à trajetória.

Êle tem um comprimento proporcional ao valor absoluto da velocidade escalar da partícula.

Seu sentido é, evidentemente, o sentido do movimento.

VI-4-3 <u>Um exemplo</u>.

Procuremos a velocidade vetorial instantânea da bola da Fig. VI-1 na posição <u>quatro</u>.

Isto é, no instante t = 4 x 1/30 = 2/15s.

O método é:

- construir os gráficos <u>x</u> vs <u>t</u> e <u>y</u> vs <u>t</u>.
- achar sôbre êsses gráficos as velocidades escalares instantâneas dx/dt e dy/dt em t = 2/15s.

Êsses valôres serão as componentes de $\vec{v}$.

Se eu conhecesse a lei s = s(t) ao longo da trajetória poderia achar, diretamente, $|ds/dt|$.

Mas eu não conheço essa lei.

Bem, vamos lá (e venha comigo por favor).

A primeira coisa a fazer é construir uma tabela dos valôres de x e y em função do tempo t.

Ou, se quiser, uma tabela das componentes do vetor de posição em função do tempo.

Na seção VI-2-5 medimos algumas.

Tabela VI-1

t (em 1/30s)	x (cm)	y (cm)
0	0	0
1	5,3	3,1
2	10	4,3
3	15	4,4
4	20	3,2
5	25	1,4
6	30	-2,7
7	36	-7,5
8	40	-13,5
9	45	-21
10	50	-29
11	56	-39
12	61	-50

A Fig. VI-17 mostra os gráficos x vs t e y vs t.

Você observa que:

- na precisão das medidas, x é uma função linear de t. dx/dt é constante e igual a $1,5 \times 10^2$ cm/s.
- dy/dt em t = 4 x 1/30s é medido pelo coeficiente angular da tangente à curva, com o devido fator de escala. Achei -44cm/s.

Então, em t = 2/15s:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,5 \times 10^2 \\ -44 \end{pmatrix} \text{ (cm/s).}$$

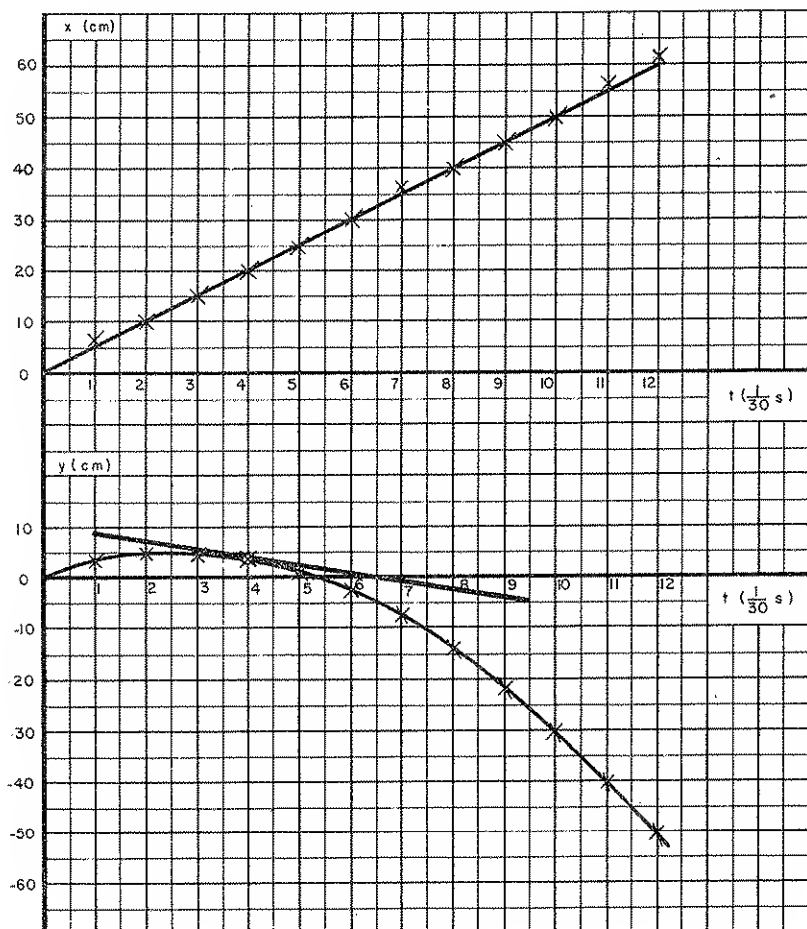



Figura VI-17

Finalmente a Fig. VI-18 mostra o segmento orientado que representa $\vec{v}$ em t = 2/15s.

<u>O suporte do segmento é tangente à trajetória da bola no ponto P</u>, posição da partícula em t = 2/15s.

O comprimento do segmento é proporcional a

$$|\vec{v}| = \sqrt{(150)^2 + (44)^2} = 156 \text{ cm/s}$$

O sentido da seta é o sentido do movimento.

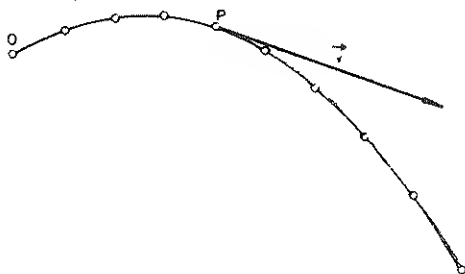



Figura VI-18

VI-5 <u>Aceleração vetorial: vetor aceleração.</u>

VI-5-1 <u>Definição e propriedades.</u>

A velocidade vetorial é taxa de variação da posição (vetorial) da partícula.

Mas, a velocidade vetorial varia com o tempo, por sua vez.

À pergunta: "Mas como é que varia um vetor?" eu respondo:

Um vetor varia se qualquer uma das suas componentes varia.

A representação geométrica permite "ver" isto.

Um vetor varia se o segmento orientado que o representa varia.

E um segmento orientado varia se varia a direção do suporte.

Ou o comprimento.

Ou ambos.

À taxa de variação média $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ da velocidade vetorial, em um intervalo $\Delta t \equiv t_2 - t_1$, dá-se o nome de <u>aceleração vetorial média</u> no intervalo. Símbolo: $\langle\vec{a}\rangle$.

À taxa de variação instantânea da velocidade vetorial em um instante <u>t</u>, dá-se o nome de <u>aceleração vetorial instantânea</u> no instante <u>t</u>. Símbolo: $\vec{a}$.

Agora lembre-se:

as componentes da velocidade são $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$.

O quociente $\frac{dx}{dt}$ é a razão entre a variação <u>dx</u> da componente - <u>x</u> da posição durante o intervalo de tempo muito pequeno <u>dt</u>, e êsse mesmo intervalo <u>dt</u>.

Analogamente, a componente - <u>x</u> da aceleração é a razão entre a variação $d(\frac{dx}{dt})$ da componente - <u>x</u> da velocidade durante o intervalo de tempo muito pequeno <u>dt</u>, e êsse mesmo intervalo <u>dt</u>.

Componente - <u>x</u> de $\vec{a} = d(dx/dt)/dt$.

Como é meio complicado escrever $d(dx/dt)/dt$, abrevia-se por d^2x/dt^2.

Isso nada mais é que uma convenção.

Escreveremos então:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-14)}$$

O módulo da aceleração instantânea é

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \qquad \text{(VI-15)}$$

Se você achar muito rebarbativo êsses d^2x/dt^2 e d^2y/dt^2, lembre-se que são, simplesmente, as taxas de variação instantâneas das componentes da velocidade vetorial.

Se você observar que a aceleração está para a velocidade assim como a velocidade está para a posição, não deve ter muita dificuldade.

Da mesma forma que posição e velocidade, a aceleração vetorial se representa por um segmento orientado.

Um segmento cujas projeções sôbre os eixos são proporcionais às componentes da aceleração.

No caso da aceleração não é tão fácil, à primeira vista, construir o segmento representativo.

Êle, geralmente, <u>não é</u> tangente à trajetória, como é o segmento que representa à velocidade.

Isto porque êle deve indicar o sentido para o qual está variando o segmento que representa a velocidade.

E, se a trajetória fôr curva, êsse segmento varia "de lado", ao seguir a curva.

Então o segmento que representa a aceleração deve estar do lado de que varia o que representa a velocidade. Na Fig. VI-19 representei o vetor de posição, o vetor velocidade, e um vetor aceleração possível.

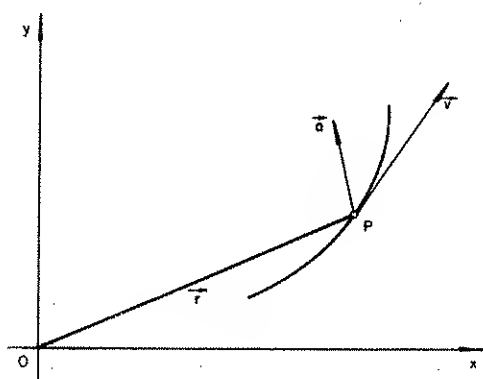



Figura VI-19

Aprofundemos um pouco as posições relativas dos vetores velocidade e aceleração.

A Fig. VI-20 mostra uma trajetória qualquer percorrida por uma partícula.

No instante <u>t</u> a partícula está em P_1. A velocidade vetorial é $\vec{v}$.

Ela é representada por um segmento orientado tangente à trajetória em P_1.

E orientado no sentido do movimento.

No instante vizinho <u>t + dt</u> a partícula está em P_2.

No intervalo dt a velocidade vetorial variou.

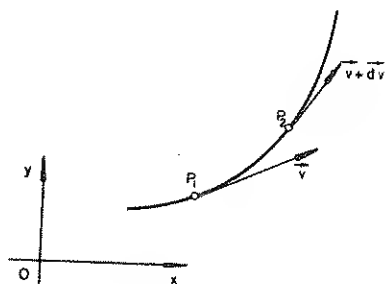



Figura VI-20

PARE!

Pare e leia de nôvo a última frase.

"No intervalo dt a velocidade vetorial variou".

Olhe para a Fig. VI-20 e me diga por que a velocidade vetorial variou entre as posições P_1 e P_2.

Variou mesmo, no duro.

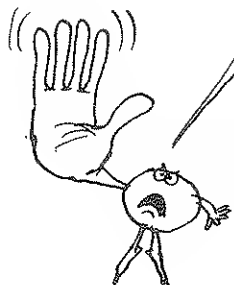
Mesmo se o movimento ao longo da trajetória fôr uniforme.

...

Já achou?

Perfeito! Variou nem que seja porque a direção do segmento orientado associado variou.

E a direção variou porque entre P_1 e P_2 a trajetória é curva.

Não é?

Bom, então como a velocidade vetorial variou, eu represento essa velocidade no instante t + dt pelo símbolo $\vec{v} + \vec{dv}$.

Isto é: o que era no instante t, mais de quanto variou no intervalo.

Para que não haja dúvida, mostro isso na Fig. VI-21.

Nesta figura construí os dois segmentos a partir do mesmo ponto, P_1.

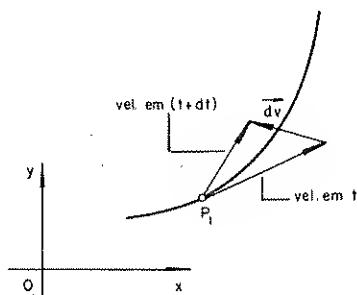



Figura VI-21

O segmento que representa a velocidade no instante t.

E o segmento que representa a velocidade no instante t + dt.

Como você vê, o segmento $\vec{dv}$, que representa a variação da velocidade no intervalo dt, aponta para o lado onde gira o segmento que representa $\vec{v}$.

Isto é, para a concavidade da trajetória.

A aceleração média no intervalo dt é o vetor $\vec{dv}/dt$. O segmento que representa êsse vetor tem a direção e o sentido de $\vec{dv}$.

Mas sendo o intervalo dt muito, muito pequeno, a aceleração média nêsse intervalo é a aceleração instantânea $\vec{a}$ no instante t (Fig. VI-22).

Concluímos que a aceleração instantânea é representada por um segmento que aponta sempre para a concavidade da trajetória.

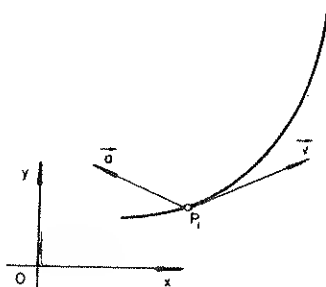



Figura VI-22

VI-5-2 Movimentos acelerados, retardados e uniformes.

O segmento que representa a aceleração $\vec{a}$ aponta sempre para a concavidade da trajetória.

Então, êle pode fazer com o segmento que representa a velocidade $\vec{v}$ um ângulo agudo, obtuso ou reto.

A Fig. VI-23 mostra os três casos.

Se o ângulo fôr agudo, o módulo da velocidade $\vec{v} + d\vec{v}$ é maior que o módulo da velocidade $\vec{v}$.

Isto significa que a velocidade escalar aumenta: o movimento é acelerado.

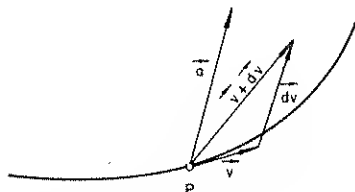
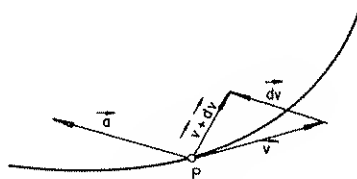
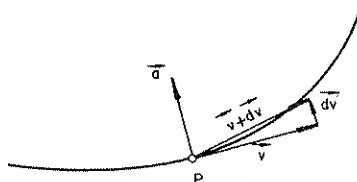
(A propósito, você se recorda que o módulo da velocidade vetorial é igual ao valor absoluto da velocidade escalar, sim?)

$\vec{a}$ e $\vec{v}$ fazem entre si um ângulo agudo: movimento acelerado

$\vec{a}$ e $\vec{v}$ fazem entre si um ângulo obtuso: movimento retardado

$\vec{a}$ e $\vec{v}$ aão perpendiculares entre si: movimento uniforme

Figura VI-23

Se o ângulo fôr agudo, o módulo da velocidade $\vec{v} + \vec{dv}$ é menor que o módulo da velocidade $\vec{v}$.

A velocidade escalar diminui: o movimento é retardado.

Se o ângulo fôr reto, o módulo da velocidade $\vec{v} + d\vec{v}$ é igual ao módulo da velocidade $\vec{v}$.

E se $\vec{a}$ permanece perpendicular a $\vec{v}$, então o movimento é uniforme.

VI-5-3 Um exemplo.

Procuremoa a aceleração vetorisl instantânea da bola da Fig. VI-1, na poaição quatro. No inatante t = 2/15a.

O primeiro trabalho é acharmoa, em função do tempo, aa componentes dx/dt e dy/dt daa velocidadea.

Volte por favor à Fig. VI-17. Você tem aí x vs t e y vs t.

Um simples olhar ao gráfico x va t mostra que a taxa de variação de x é conatante.

Ela é igual a 150 cm/s.

Se dx/dt é conatante, então aua taxa de variação é nula. Não é mesmo?

De modo que $d^2x/dt^2 = 0$. A componente - x da aceleração da bola é sempre nula.

E se easa componente é nula, o segmento que representa a aceleração é paralelo ao eixo Oy.

O que não chega realmente a ser novidade.

A seguir medimos a taxa de variação instantânea de y a partir do gráfico y vs t.

Traçando tangentes e medindo coeficientes angulares.

A Tabela VI-2 mostra os meua resultados.

Tabela VI-2

t(em 1/30s)	dy/dt (cm/s)	t(em 1/30s)	dy/dt (cm/s)
0	120	7	-170
1	63	8	-210
2	30	9	-245
3	-17	10	-276
4	-44	11	-300
5	-93	12	-337
6	-128		

E a Fig. VI-24 é o gráfico dy/dt vs t.

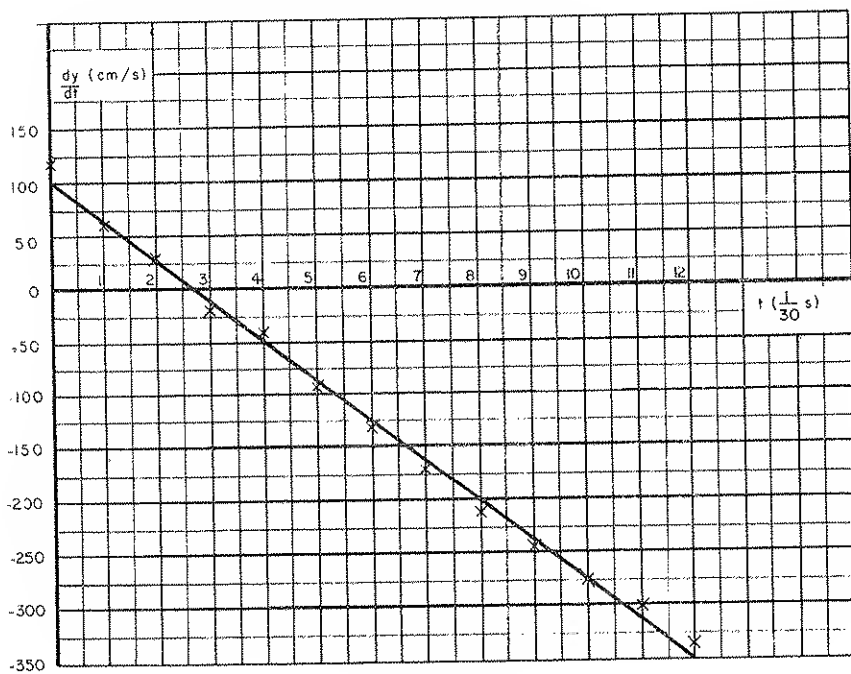



Figura VI-24

Acho que podemos concluir, razoàvelmente, que dy/dt varia linearmente com t.

A taxa constante de variação é $-1{,}1 \times 10^3$ cm/s^2.

Queríamos determinar a aceleração $\vec{a}$ em t = 2/15s.

Acabamos descobrindo que $\vec{a}$ é constante.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}1 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad (\text{cm/s}^2)$$

Essa aceleração é representada por um segmento vertical, dirigido para baixo, e cujo módulo é $1{,}1 \times 10^3$ cm/s^2.

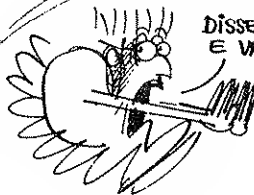
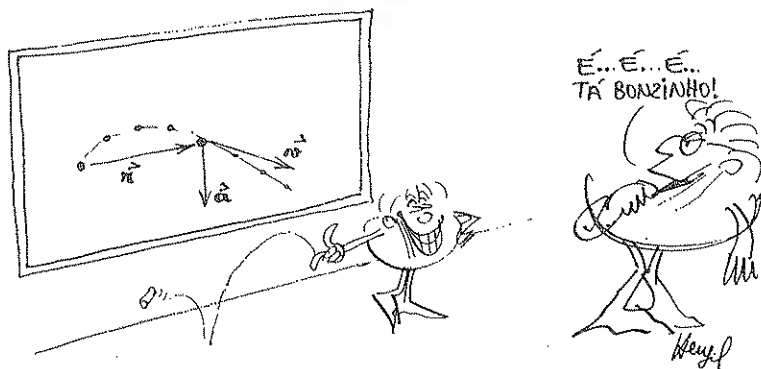
É a aceleração de uma bola que cai, livremente.

Espanto do Martins...

MARTINS E EU

PROFESSOR, ESTA ACELERAÇÃO NÃO É A ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE?

MAS O SENHOR NÃO DISSE QUE ESSA ACELERAÇÃO VALE 981 cm/s²?
DISSE SIM! E VALE...

MAS ENTÃO?
MAS, ENTÃO, O ÊRRO QUE FOI COMETIDO AO ANALISARMOS A FOTOGRAFIA DA FIGURA VI-2, É DE TRINTA PARTES EM MIL, OU SEJA, 3% ! É RAZOÁVEL, SEM MAIS.
PARA O QUE EU QUERIA MOSTRAR-LHE NESSE CAPÍTULO, ESTÁ CLARO...
MÃE!!!
AGORA VAMOS LÁ, PARA VOCÊ ME DESENHAR OS SEGMENTOS ORIENTADOS QUE REPRESENTAM A POSIÇÃO, A VELOCIDADE E A ACELERAÇÃO DA BOLA NO INSTANTE T=2/15.
GRRR...
É... É... É... TÁ BONZINHO!

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) deverão ser discutidos em sala, com seu Professor).

VI-1 Qual é o referencial que você escolheria para estudar o movimento:

a) de uma mancha de óleo no pneu de uma roda de bicicleta;
b) da extremidade do ponteiro dos minutos de seu relógio;
c) de um satélite artificial;
d) da extremidade de uma pá da hélice de um avião em vôo;
e) da pedra que você amarrou a um barbante para fazer um pêndulo;
f) de um carro que percorre uma reta;
g) da môsca que anda no vidro da janela;
h) de uma gôta de chuva que cai.

VI-2 Retorne aos exemplos de movimentos propostos no problema precedente. Em todos os exemplos de movimentos planos (ou unidimensionais), escolha o sistema de eixos e a origem que você achar mais convenientes. (Não esqueça de indicar o sentido positivo dos eixos!)

*VI-3 A fotografia da figura mostra, como a da Fig. VI-1, a trajetória de uma bola depois de deixar uma rampa de lançamento. Os flashes se sucedem a 1/30s de intervalo.

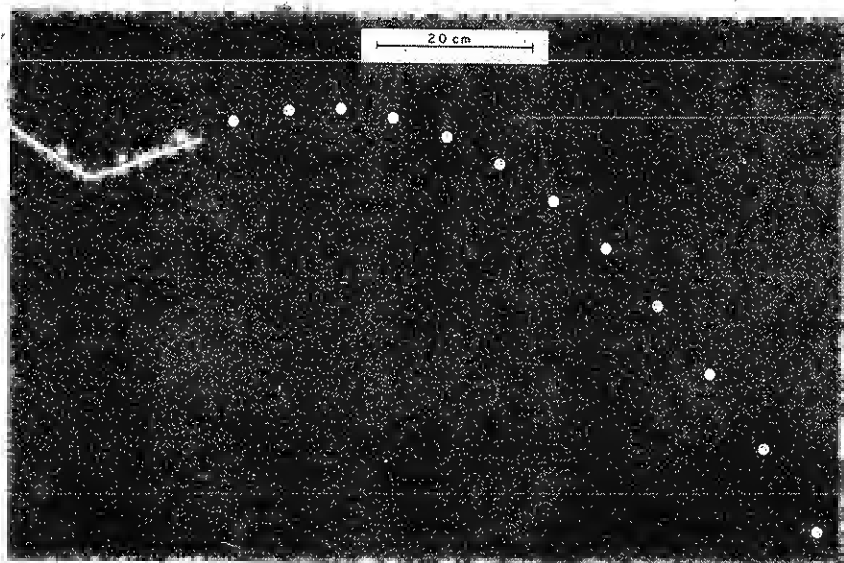
Escôlha um sistema de eixos e uma origem (a que você achar conveniente) e leve para um papel transparente as posições sucessivas da bola depois de deixar a rampa.

Escreva os vetores de posição correspondentes.

(Conserve seus resultados. Você os utilizará em outros problemas).

VI-4 Refira-se ao problema VI-3.

Quais são os módulos dos vetores de posição sucessivos da bola?

Nota: Para que você se acostume a diferenciar conceitualmente uma grandeza vetorial do segmento orientado que a representa gràficamente, você medirá

Problema *VI-3

primeiro os comprimentos dos segmentos que representam as posições. A seguir você transformará êsses comprimentos em módulos, multiplicando-os pelo fator de escala adequado.

VI-5 Considere os vetores de posição dos dois cantos livres desta fôlha, tomando como origem o ponto da letra i que acabo de escrever.

Ache as componentes dêsses vetores. (Escôlha os seus eixos!)

Represente-os, gràficamente, por dois segmentos orientados.

Quais são as projeções dêsses vetores?

Você escolherá os fatores de escala convenientes.

VI-6 Considere os seguintes segmentos orientados:

Segmento	Projeções
$\overrightarrow{A_1B_1}$	(9,0cm 2,0cm)
$\overrightarrow{A_2B_2}$	(-5,0cm 1,0cm)

Qual é a soma dêsses dois segmentos? Qual é o módulo da soma? Resolva, também, gràficamente.

*VI-7 Considere dois segmentos orientados

$\overrightarrow{A_1B_1}$	$(X_1 \quad Y_1)$
$\overrightarrow{A_2B_2}$	$(X_2 \quad Y_2)$

Seja $\overrightarrow{AB}$ (X Y) a soma dêsses dois segmentos.

Compare o comprimento de $\overrightarrow{AB}$ com os comprimentos de $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$.

VI-8 Em que condições o comprimento da soma de dois segmentos orientados é igual à soma dos comprimentos das parcelas?

VI-9 Em que condições o comprimento da soma de dois segmentos orientados é igual à diferença dos comprimentos das parcelas?

*VI-10 As componentes do segmento $\overrightarrow{AB}$ são (4,0cm 0). O segmento $\overrightarrow{CD}$ tem comprimento igual a 3,0cm.

Ache uma construção gráfica simples para determinar $\overrightarrow{CD}$ tal que a soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ faça com $\overrightarrow{AB}$ o maior ângulo possível.

VI-11 Mostre que, sendo $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ duas grandezas vetoriais e $\vec{V}$ sua soma,

$$\left| |\vec{v}_1| - |\vec{v}_2| \right| < |\vec{V}| < |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|$$

*VI-12 Procure um mapa do Brasil.

Tomando como origem o Rio de Janeiro, considere os vetores de posição das seguintes cidades:

$\vec{r}_1$: Rio - São Paulo

$\vec{r}_2$ Rio - Pôrto Alegre

$\vec{r}_3$ Rio - Belo Horizonte

$\vec{r}_4$ Rio - Brasilia

$\vec{r}_5$ Rio - Vitória

$\vec{r}_6$ Rio - Salvador

$\vec{r}_7$ Rio - Recife

$\vec{r}_8$ Rio - Natal

$\vec{r}_9$ Rio - Belém

$\vec{r}_{10}$ Rio - Manaus

Represente, gràficamente, êsses vetores por segmentos orientados, depois de escolher o sistema de eixos e os fatores de escala que você julgar convenientes.

*VI-13 Considere o vetor de posição $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3,0 \\ 4,0 \end{pmatrix}$ (cm).

Represente, gràficamente, êsse vetor por um segmento orientado.

Repare agora que $\begin{pmatrix} 3,0 \\ 4,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,0 \end{pmatrix}$.

Chame $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, os vetores do segundo membro da relação anterior.

Quais são os segmentos orientados que representam gràficamente $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$?

VI-14 Um automóvel percorre 10km em linha reta indo para o Norte e a seguir 5,0km indo para o Oeste.

. Qual é o vetor de posição final do automóvel?

Represente êsses dois deslocamentos sucessivos por segmentos orientados.

*VI-15 Volte à fotografia do problema VI-3.

Considere duas posições quaisquer da bola e sejam $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ os vetores de posição correspondentes.

É bem evidente que a soma $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ tem uma expressão matemática. (Qual é?)

Mas você acha que essa soma tem um sentido <u>físico</u>?

*VI-16 Não deixe de fazer êste problema, por favor!

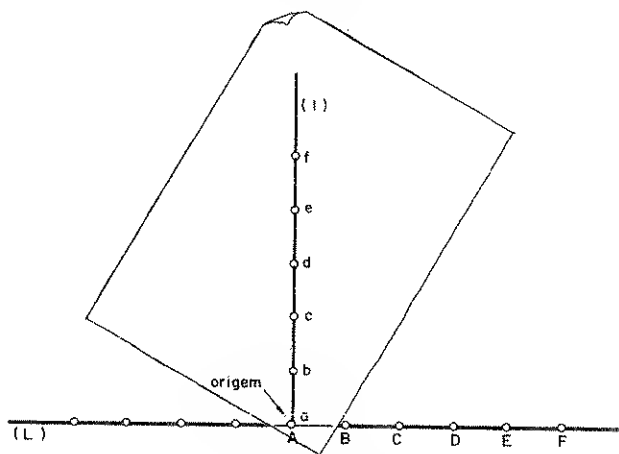
Tome uma fôlha de papel e trace nela uma reta (L), como na figura.

Gradue essa reta em centímetros e escôlha uma dessas marcas como origem. É o ponto A.

A seguir tome uma fôlha de papel transparente onde traçará uma reta ($\underline{\ell}$), também graduada em centímetros: <u>a</u> <u>b</u> <u>c</u> <u>d</u>...

Imagine, agora, a seguinte situação (parece um pouco complicado mas não é): uma formiga se desloca sôbre a fôlha transparente, seguindo a reta ($\underline{\ell}$). Parte de <u>a</u> no instante zero e anda 1,0cm cada segundo. No instante 1,0s ela está em <u>b</u>; no instante 2,0s ela está em <u>c</u> e assim por diante.

Ao mesmo tempo, a fôlha transparente desliza sôbre a fôlha de papel, de tal modo que o ponto <u>a</u> da fôlha transparente siga a reta (L), andando, também 1,0cm por segundo. No instante zero êle coincide com A, no instante 1,0s êle coincide com B, etc...

Mas não é só isto. A fôlha transparente guarda no seu deslizamento uma direção _fixa_ em relação à fôlha de papel.

Diz-se que ela está em translação no referencial dessa fôlha. Você conseguirá, fàcilmente, êsse movimento obrigando a reta (ℓ) a fazer um ângulo _constante_ com a reta (L).

Na figura, essas duas retas são perpendiculares mas eu poderia (e você pode) escolher qualquer outro ângulo.

Estamos prontos agora a iniciar a brincadeira.

Peço que você assinale _na fôlha de papel_ o ponto que coincide com a posição da formiga de segundo em segundo, até t = 5,0s.

Basta que em cada posição sucessiva da fôlha transparente, você apoie com um lápis (ou com a ponta de um compasso) no ponto em que está a formiga naquêle instante. A ponta do lápis ou do compasso deixará a marca na fôlha de papel que está por baixo.

a) Qual é a trajetória da formiga no referencial da fôlha de papel?

b) Qual é a trajetória da formiga no referencial da fôlha transparente?

c) Qual é, no referencial da fôlha de papel (origem A), o vetor de posição da formiga em t = 5,0s. Seja $\vec{r}$ êsse vetor.

d) Qual é, no referencial da fôlha transparente (origem a) o vetor de posição da formiga em $t = 5,0s$? Seja $\vec{r}'$ êsse vetor.

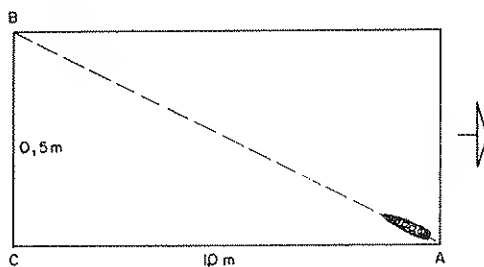
e) Qual é, no referencial da fôlha de papel (origem A) o vetor de posição do ponto a da fôlha transparente em $t = 5,0s$. Seja $\vec{R}$ êsse vetor.

f) No instante $t = 5,0s$, considere na fôlha de papel os três pontos seguintes: a origem A; o ponto P que coincide com a posição da formiga; o ponto F que coincide com a posição do ponto a.

Quais são os vetores representados gràficamente pelos segmentos orientados $\vec{AP}$? $\vec{PF}$? $\vec{AF}$? (O fator de escala é 1).

g) Temos $\vec{AP} = \vec{AF} + \vec{FP}$, o que traduz a igualdade $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$.

Qual é o sentido físico dessa igualdade? (Todo o problema está nisto!)

VI-17 O Martins gosta de construir modelos reduzidos de navios. Faz alguns dias êle estava experimentando um contratorpedeiro em um tanque de seção retangular de 1,0m por 0,50m (Veja a Figura). O navio saía do canto A e ia diretamente para o canto oposto B.

Enquanto isto, Martins puxava o tanque no sentido da seta. No intervalo de tempo que o navio levava para ir de A até B, o canto C do tanque vinha ocupar o lugar onde estava, inicialmente, o canto A.

Se você tivesse assistido à experiência do Martins, em pé, ao lado

do tanque, qual a trajetória que você teria observado para o contratorpedeiro. (trajetória na sala, não no tanque)?

VI-18 Em determinado instante o vetor de posição de uma partícula é

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 8,0 \\ -3,0 \end{pmatrix} \text{ (cm)}.$$

Mais tarde o segmento orientado que representa o vetor de posição da mesma partícula tem a mesma direção e o mesmo sentido, mas seu comprimento duplicou.

Quais são as componentes dêsse nôvo vetor de posição?

VI-19 Sendo $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2,0 \\ 4,0 \end{pmatrix}$ (cm) e $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -3,0 \\ -5,0 \end{pmatrix}$ (cm) dois vetores de posição, quais são as componentes de $2\vec{r}_1 + \vec{r}_2$?

Represente, gràficamente, a operação acima.

*VI-20 Sejam $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -3,0 \\ 8,0 \end{pmatrix}$ (cm), e $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -7,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$ (cm), os vetores de posição de uma mesma partícula em dois instantes sucessivos $\underline{t_1}$ e $\underline{t_2}$.

a) Quais são as componentes do vetor $(-\vec{r}_1)$?

b) Quais são as componentes da diferença $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$?

c) Qual é o sentido físico dessa diferença?

VI-21 Volte ao movimento da bola do problema VI-3.

De quanto variou a posição da partícula entre os instantes

$$t_1 = 2 \times 1/30\text{s}$$

e $$t_2 = 6 \times 1/30\text{s} \;?$$

VI-22 Volte de nôvo, ao movimento da bola do problema VI-3.

Utilizando os resultados do problema VI-4, caracterize todos os vetores de posição pelos seus módulos e pela direção correspondente.

Você poderá definir a direção pelo ângulo de que você precisaria

girar o seu eixo - x para que êle coincida em direção e sentido com o segmento orientado associado ao vetor de posição considerado.

VI-23 Construa os vetores de posição caracterizados da maneira seguinte:

vetor	módulo	ângulo com o eixo-x
$\vec{r}_1$	4,0m	$+30^o$
$\vec{r}_2$	2,0m	-45^o
$\vec{r}_3$	6,0m	$+60^o$

Quais são as componentes desses vetores?
Construa a soma $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$.
Quais são as componentes da soma?

*VI-24 Para fazer um terno (ou um vestido) sob medida, o alfaiate ou a costureira toma uma série de medidas, sempre na mesma ordem para poderem entender depois o que estão fazendo.

Para êles uma roupa se mede, por assim dizer, por um conjunto ordenado de números.

Será que as roupas sob medida pertencem ao mesmo "clube" que os vetores, ou que os segmentos orientados?

VI-25 Você mede a velocidade média (vetorial) de uma partícula entre dois instantes dados.

Se você mudasse de origem para os vetores de posição, o resultado seria diferente?

VI-26 Um carro de corrida percorre um circuito fechad de 200km com velocidade constante de 100km/h.

Qual é sua velocidade vetorial média entre duas passagens sucessivas pela reta de chegada?

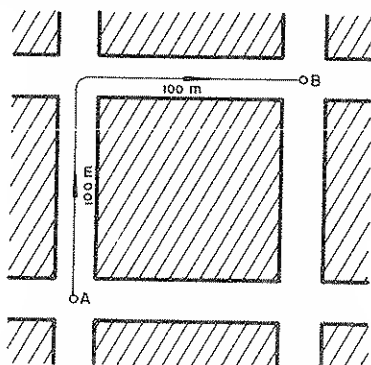
VI-27 Volte ao movimento da bola do problema VI-3. Quais são as componentes da velocidade média da bola (com os eixos que você escolheu) entre os instantes $t_1 = 2 \times 1/30s$ e $t_2 = 6 \times 1/30s$?

Qual é o módulo dessa velocidade média?

VI-28 Um automóvel percorre o caminho AB mostrado na figura, com velocidade constante de 5,0 m/s.

Quais são as componentes de sua velocidade vetorial média entre a saída de A e a chegada em B?

(Escôlha convenientemente os seus eixos!)

Qual é o módulo dessa velocidade média?

VI-29 Volte mais uma vez ao movimento da bola do problema VI-3.

Construa para êsse movimento a tabela das componentes x e y do vetor de posição em função do tempo (como na Tabela VI-1).

A seguir, construa os gráficos x vs t e y vs t.

Quais são as componentes da velocidade instantânea $\vec{v}$ em

$$t = 7 \times 1/30s?$$

Qual é o módulo dessa velocidade?

Represente, gràficamente, essa velocidade por um segmento orientado. Não esqueça de especificar o fator de escala que você escolher para essa representação.

VI-30 Referindo-se ao problema precedente, responda às mesmas perguntas relativas a $\vec{v}$ no instante $t = 0$.

VI-31 Refira-se aos problemas VI-29 e VI-30.

De quanto variou o vetor velocidade instantânea da bola entre os instantes $t_1 = 0$ e $t_2 = 7 \times 1/30s$?

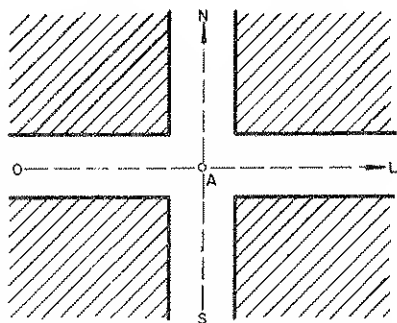
Construa o segmento orientado que representa essa variação. Qual é o fator de escala que você escolheu?

VI-32 Você passa, de automóvel, por um cruzamento, indo de Sul para Norte, com a velocidade de 20m/s.

Três minutos depois, você passa pelo mesmo cruzamento, andando agora de Oeste para Leste, e com velocidade de 10m/s.

De quanto variou sua velocidade vetorial entre as duas passagens?

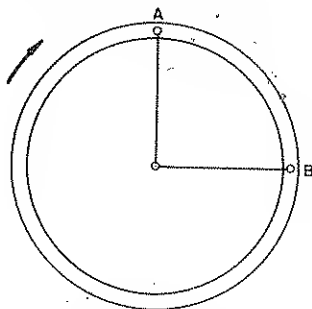
Qual foi sua aceleração vetorial média naquêle intervalo?

Represente, gràficamente, essa aceleração média. Qual é o fator de escala?

VI-33 Um automóvel de corrida percorre uma pista circular com a velocidade uniforme de 180 km/h.

De quanto varia a velocidade vetorial do automóvel entre duas passagens consecutivas pelos pontos A e B?

O raio da pista é 3,0km. Qual foi a aceleração vetorial média do au

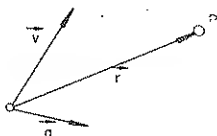
tomóvel entre as passagens por A e B?

Construa o segmento orientado que representa, gràficamente, a aceleração média.

VI-34 Volte ao movimento da bola do problema VI-3. Construa uma tabela dos valores de dx/dt e dy/dt em função do tempo. (Utilize os resultados e os gráficos do problema VI-29). A seguir, construa os gráficos dx/dt vs t e dy/dt vs t.

Quais são as componentes da aceleração instantânea da bola em t = 0? em t = 3 x 1/30s? em t = 7 x 1/30s?

Representee, gràficamente, essas acelerações vetoriais pelos segmentos orientados convenientes.

VI-35 A Figura representa os vetores de posição, velocidade e aceleração de uma partícula em determinado instante t. Nêsse instante a partícula está em P.

Construa um elemento de trajetória possível (isto é, um elemento de trajetória que a partícula poderia, realmente, percorrer na vizinhança do instante t).

VI-36 Os três vetores da Figura representam os vetores de posição, velocidade e aceleração de uma partícula em determinado instante t.

Infelizmente, o Martins apagou a identificação dêsses vetores.

Sabe-se no entanto que em t o movimento era retardado.

Com essa única informação você seria capaz de identificar os três vetores?

*VI-37 No final do Capítulo, Martins e eu concordamos que o êrro cometido na medida da aceleração da gravidade, ao analisarmos a Fig. VI-1, foi de 3%. Para uma técnica fotográfica, 3% é um êrro razoàvelmente importante (0,5% seria mais aceitável). Você poderia apontar algumas causas para essa anomalia?

CAPÍTULO VII

Cinemática vetorial: II - Aplicações

I
- Movimentos retilíneos
- Movimento circular uniforme
- Movimento harmônico simples

VII-1 O que é que vamos fazer com êsses vetores?

No Capítulo V estudamos movimentos uniformes e uniformemente variados do ponto de vista do observador "unidimensional".

O observador com antôlhos que sòmente vê o que acontece ao longo da trajetória.

Vamos agora aplicar nossos conhecimentos de cinemática vetorial para estudar alguns movimentos, uniformes ou não, em maior generalidade.

Olhando para a trajetória claro, mas também para o que acontece ao lado.

Escolheremos os movimentos que têm maior importância em Física.

Os que o experimentador encontra mais frequentemente no Laboratório.

E que ao mesmo tempo estejam a nosso alcance nêsse primeiro estudo da Física.

VII-2 Movimentos retilíneos.

No Laboratório, a trajetória é uma reta.

É uma gôta de água caindo de uma bica.

Ou o carrinho deslizando sôbre o seu colchão de ar.

Ou os elétrons disparados pelo canhão do tubo do aparelho de televisão...

VII-2-1 <u>Movimentos retilíneos uniformes</u>.

São movimentos cuja velocidade (vetorial) é constante.

E consequentemente a aceleração vetorial é nula.

Pelo que vimos na seção VI-4-2 do Capítulo VI, o módulo do vetor velocidade é igual ao valor absoluto da velocidade escalar.

A direção do segmento orientado que representa a velocidade é a direção da trajetória (Fig. VII-1).

Figura VII-1

E o sentido é o sentido do movimento.

Seja O o ponto da trajetória pelo qual passa a partícula no instante zero.

Depois de <u>t</u> unidades de tempo a partícula atingiu a posição P e o vetor de posição $\vec{r}$ é representado pelo segmento $\overrightarrow{OP}$.

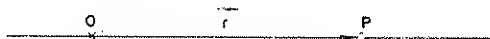



Figura VII-2

Temos evidentemente

$$\vec{r} = \vec{v}\, t \qquad \text{(VII-1)}$$

o que é a tradução vetorial do $s = vt$ do Capítulo V.

VII-2-2 <u>Movimentos retilíneos uniformemente variados</u>.

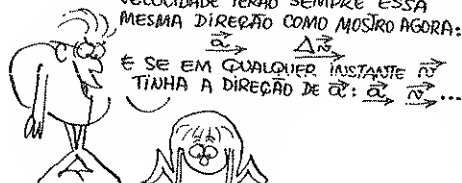
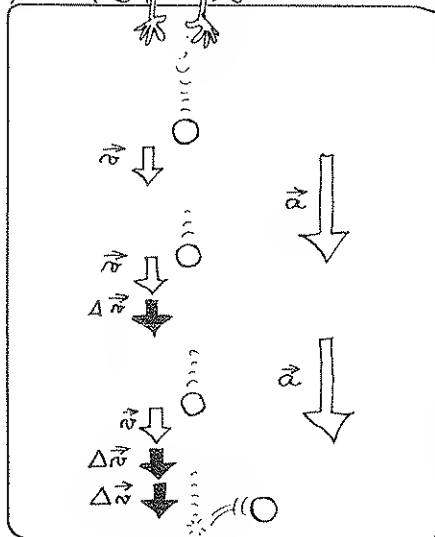
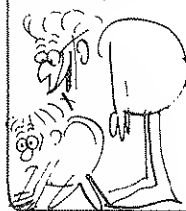
São movimentos cuja aceleração (vetorial) é constante e cuja velocidade tem a mesma direção que a aceleração.

Observe que se em um instante <u>qualquer</u> a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração constante $\vec{a}$ têm a mesma direção, então essas duas grandezas terão <u>sempre</u> a mesma direção. E a trajetória será reta.

MARTINS E EU

CALMA MARTINS, EU TE EXPLICO! SENDO $\vec{a}$ A ACELERAÇÃO TEMOS $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, CERTO?

CERTO!

ENTÃO, SE $\vec{a}$ TIVER SEMPRE A MESMA DIREÇÃO, AS VARIAÇÕES SUCESSIVAS DE VELOCIDADE TERÃO SEMPRE ESSA MESMA DIREÇÃO COMO MOSTRO AGORA: $\vec{a}$ $\Delta \vec{v}$

E SE EM QUALQUER INSTANTE $\vec{v}$ TINHA A DIREÇÃO DE $\vec{a}$: $\vec{a}$ $\vec{v}$...

VOCÊ NUNCA PODERÁ MUDAR ESSA DIREÇÃO SOMANDO UM VETOR QUE TEM PRECISAMENTE ESSA MESMA DIREÇÃO...

CERTO! MAS ENTÃO O SENHOR NÃO PRECISA IMPOR A ACELERAÇÃO DE SER CONSTANTE. BASTA QUE A SUA DIREÇÃO NÃO MUDE, NÉ?

Procuremos agora a expressão da velocidade em função do tempo.

Seja $\vec{v}_o$ a velocidade no instante zero (Fig. VII-3).

$\vec{a}$

$\vec{v}_o$ $\quad\quad$ $\vec{\Delta v} = \vec{a}t$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\Delta v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$$

Figura VII-3

No instante em que a partícula passa pela origem O.

Sendo constante a aceleração, aceleração média e aceleração instantânea são idênticas.

De modo que depois de t unidades de tempo a velocidade inicial terá variado de

$$\vec{\Delta v} = \vec{a}t \qquad \text{(VII-2)}$$

E a velocidade $\vec{v}$ no instante t será

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t \qquad \text{(VII-3)}$$

o que é a tradução vetorial da expressão unidimensional

$$v = v_o + at$$

Passemos à posição vetorial $\vec{r}$.

A origem dos vetores de posição coincide mais uma vez com a posição da partícula no instante zero.

A velocidade inicial é $\vec{v}_o$, na direção de $\vec{a}$ e ao longo da trajetória.

Problema: qual é a expressão de $\vec{r}$ em função de t?

MARTINS E EU

PROFESSOR POSSO DAR UM PALPITE!
PODE SIM, PORQUE NÃO!

CINEMÁTICA ESCALAR
MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE
$s = v.t + \frac{1}{2} at^2$
TRADUZINDO ISSO DEVE DAR ISTO...
CINEMÁTICA VETORIAL
MOVIMENTO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE
$\vec{r} = \vec{v}.t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

ÓTIMO MARTINS. É ISSO MESMO! MAS VOCÊ ESTÁ DISPOSTO BRINCAR COM OS CONCEITOS FUNDAMENTAIS QUE APRENDEMOS NO CAPÍTULO VI?

HEIM?

VAMOS DEDUZIR JUNTOS O SEU PALPITE E NÃO É SÓ POR BRINCADEIRA NÃO! É PRA LHE MOSTRAR QUE COM MUITO POUCA SOFISTICAÇÃO MATEMÁTICA AINDA HÁ MEIO DA GENTE SE AJEITAR EM FÍSICA...

PODE MANDAR BRASA!!

Eu quero o vetor de posição no instante t não é mesmo?

Então eu vou dividir o intervalo (0, t) em n sub-intervalos pequenos, mas pequenos mesmo.

A duração de cada sub-intervalo é t/n.

A brincadeira consiste em escrever que sendo $\vec{v}$ a velocidade no início de um sub-intervalo, êsse vetor não tem pràticamente tempo de mudar durante êsse intervalozinho t/n (tão pequeno coitado!), de modo que a posição vai variar de

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v} \frac{t}{n}$$

Na realidade se v é a velocidade no início, ela será

$$\vec{v} + \vec{a} \frac{t}{n}$$

no final.

Eu escôlho um valor tão grande para n que no cálculo de $\overrightarrow{\Delta r}$ eu desprezo a contribuição da segunda parcela...

MARTINS E EU

ME CONCEDE ESTA?
POIS NÃO MARTINS...

O SENHOR VAI TER UM NÚMERO MUITO GRANDE DE SUB-INTERVALOS. SERÁ QUE DESPREZANDO TÔDAS ESTAS PARCELAS NÃO VAI ACABAR COM UM MOVIMENTO UNIFORME?

NÃO HÁ PERIGO NÃO! PORQUE NO SUB-INTERVALO SEGUINTE EU VOU TOMAR COMO VALOR DA VELOCIDADE A EXPRESSÃO $\vec{v} + \frac{\vec{\alpha} t}{v}$, ISTO É O VALOR FINAL DA VELOCIDADE NO SUB-INTERVALO PRECEDENTE...

MAS ISTO NÃO É UM POUCO A MESMA COISA QUE O SENHOR FEZ NA SEÇÃO IV-9.2 DO CAPÍTULO III, PARA DETERMINAR A POSIÇÃO ESCALAR A PARTIR DA VELOCIDADE?

É ISSO MESMO! COMO VOCÊ DIZ, É "UM POUCO" A MESMA COISA...

Bom, mas retomando o fio da meada, vamos construir a tabela seguinte.

Preste atenção. Não vai ter dificuldade nenhuma.

Sub-intervalo	Velocidade no início	$\overrightarrow{\Delta r}$ no sub-intervalo	velocidade no fim
$0 \quad \frac{t}{n}$	$\vec{v}_o$	$\vec{v}_o \frac{t}{n}$	$\vec{v}_o + \vec{a}\frac{t}{n}$
$\frac{t}{n} \quad \frac{2t}{n}$	$\vec{v}_o + \vec{a}\frac{t}{n}$	$\vec{v}_o \frac{t}{n} + \vec{a}(\frac{t}{n})^2$	$\vec{v}_o + \vec{a}\frac{t}{n} + \vec{a}\frac{t}{n}$
$\frac{2t}{n} \quad \frac{3t}{n}$	$\vec{v}_o + 2\,\vec{a}\frac{t}{n}$	$\vec{v}_o \frac{t}{n} + 2\vec{a}(\frac{t}{n})^2$	$\vec{v}_o + 2\vec{a}\frac{t}{n} + \vec{a}\frac{t}{n}$
$\frac{3t}{n} \quad \frac{4t}{n}$	$\vec{v}_o + 3\,\vec{a}\frac{t}{n}$	$\vec{v}_o \frac{t}{n} + 3\vec{a}(\frac{t}{n})^2$	$\vec{v}_o + 3\vec{a}\frac{t}{n} + \vec{a}\frac{t}{n}$
$\vdots$			
$\frac{(n-1)t}{n} \quad t$	$\vec{v}_o + (n-1)\vec{a}\frac{t}{n}$	$\vec{v}_o \frac{t}{n} + (n-1)\vec{a}(\frac{t}{n})^2$	

Para termos a posição no instante t basta somar todos os $\overrightarrow{\Delta r}$ sucessivos, ou seja, as n parcelas da coluna intitulada "$\overrightarrow{\Delta r}$ no sub-intervalo":

$$\vec{r} = n(\vec{v}_o \frac{t}{n}) + \left| 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) \right| \vec{a}\,(\frac{t}{n})^2 \qquad \text{(VII-4)}$$

Dentro do colchête, você reconhece a soma dos (n-1) primeiros inteiros sucessivos.

É a soma de uma progressão aritmética, e ela vale $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Não

é mesmo?

De modo que a expressão (VII-4) se escreve

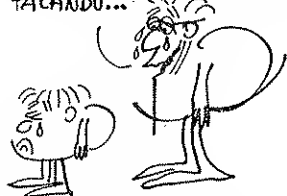
$$\vec{r} = \vec{v}_o t + \frac{1}{2} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \vec{a} t^2 \qquad \text{(VII-5)}$$

Mas evidentemente essa expressão é sòmente aproximada.

Lembra-se? Dividimos em n sub-intervalos e em cada um consideramos a velocidade constante.

Isto é, fizemos variar a velocidade "por pulos".

Quando na realidade a velocidade varia contìnuamente no decorrer do tempo.

O que é que temos que fazer para tornar mais precisa a expressão (VII-5)?

E seguindo os conselhos do Martins, vamos tornar n cada vez maior na expressão (VII-5).

Basta ver o que acontece à fração

$$\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2} = 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$$

Mas não é óbvio o que acontece? Se n fôr igual a 10^2 a fração vale $1 - 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-4}$.

Se n fôr igual a 10^3, temos $1 - 3 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-6}$...

Você já entendeu que à medida que n cresce, o valor da fração é cada vez mais vizinho que 1.

De modo que no limite êsse valor é 1.

E a expressão (VII-5) toma finalmente o valor previsto pelo Martins:

$$\vec{r} = \vec{v}_o t + 1/2\ \vec{a}\ t^2 \qquad \text{(VII-6)}$$

MARTINS E EU

PROFESSOR! O RESULTADO QUE O SENHOR OBTEVE DEPENDE SÔMENTE DE PODER FATORAR $\vec{a}$ NA SOMA DOS $\Delta\vec{r}$, CERTO?
CERTO!

DE MODO QUE A EXPRESSÃO (VIII-6) É VÁLIDA EM TODOS OS CASOS EM QUE A ACELERAÇÃO FÔR CONSTANTE, MESMO SE A VELOCIDADE INICIAL NÃO TIVER A DIREÇÃO DA ACELERAÇÃO?
EXATO! ELA É VÁLIDA MESMO SE A TRAJETÓRIA NÃO FOR RETA!

NÃO PODERIA DAR UM EXEMPLO?
O MOVIMENTO DOS PROJÉTEIS...

NÃO! POR FAVOR MARTINS... LARGA ESTA PEDRA. NÃO PRECISA FAZER A EXPERIÊNCIA AGORA...

VII-3 Movimento circular uniforme.

A trajetória é uma circunferência e a velocidade escalar é constante.

O problema é caracterizar a posição, a velocidade e a aceleração vetoriais, em um instante qualquer.

VII-3-1 Vetor de posição - Posição angular - Coordenadas polarea.

Orientemos positivamente a trajetória no sentido anti-horário (sentido contrário ao da rotação dos ponteiros do relógio).

Na Fig. VII-4 a partícula se movimenta no sentido positivo.

No instante zero, ela passa pelo ponto A, origem das posições escalares sôbre a trajetória. No instante t ela está em P.

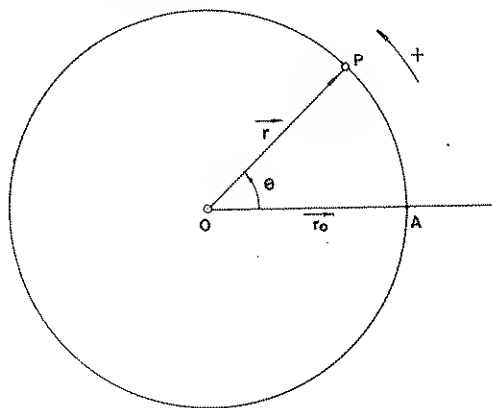



Figura VII-4

Tomemos como origem dos vetores de posição o centro da trajetória.

A simetria do problema nos obriga pràticamente a isto.

No instante zero o vetor de posição $\vec{r}_o$ é representado pelo segmen - to orientado $\overrightarrow{OA}$.

No instante t o vetor de posição $\vec{r}$ é representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{OP}$.

Poderíamos medir o vetor de posição em um instante qualquer t pelas suas componentes ao longo de dois eixos coordenados retangulares.

Mas é muito comum mudar de representação e medir a posição em um sistema de coordenadas polares.

Em que consiste isto?

Convenhamos de medir os ângulos centrais a partir da semi-reta OA tomada como origem.

No instante t a posição da partícula é caracterizada pelo ângulo (OA, OP) = θ.

θ é chamado "posição angular" da partícula.

É evidentemente uma função do tempo.

θ é sempre medido no sentido do movimento, e por definição é positivo se a partícula gira no sentido positivo, e negativo no caso contrário.

Com essa convenção é fácil ver que se a partícula girar no sentido positivo, θ cresce com o tempo. E se girar no sentido negativo, θ decresce com o tempo.

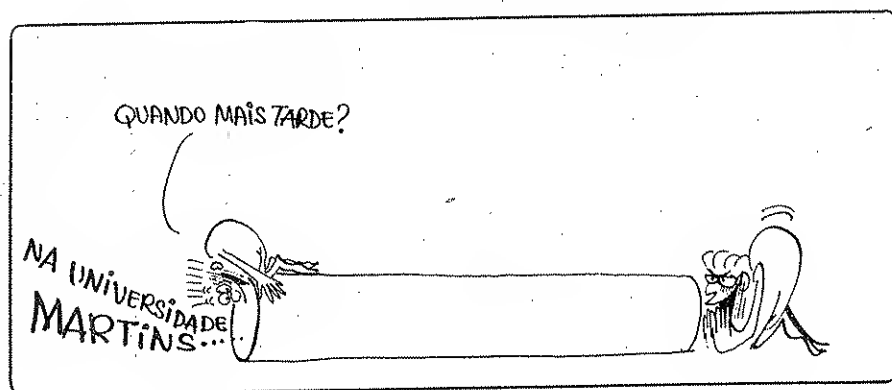
O ângulo θ em si não seria suficiente para determinar a posição, se conhecessemos a trajetória de ante-mão.

Remediamos a isto fornecendo, ao mesmo tempo que o ângulo θ, o valor r do módulo do vetor de posição.

No movimento circular r é constante.

Os dois números r e θ constituem as coordenadas polares da partícula.

Êles medem o vetor de posição nêsse novo sistema de coordenadas.

Por razões que sòmente mais tarde você poderá entender...

... não representaremos o vetor $\vec{r}$ por $\binom{r}{\theta}$.
A representação por uma coluna de dois números deve ser reservada à representação em coordenadas cartesianas.

No entanto, é extremamente fácil passar de um sistema para o outro.

Na Fig. VII-5 está representado um sistema retangular: Ox orientado ao longo de OA, e Oy deduzido de Ox pela rotação de $+\pi/2$.

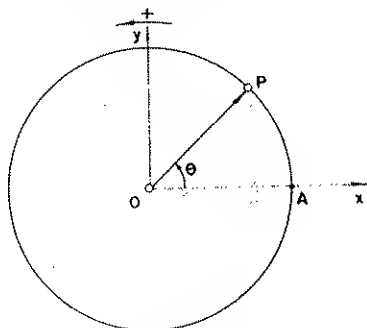



Figura VII-5

É bem evidente que as componentes cartesianas do vetor de posição são $r\cos\theta$ e $r\,\text{sen}\theta$.

De modo que agora podemos escrever

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\ \text{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(VII-7)}$$

E supondo que eu lhe fornecesse as componentes cartesianas x e y do vetor de posição, como é que você acharia r e θ?

VII-3-2 Velocidade angular.

Por definição, chamaremos velocidade angular ω à taxa de variação da posição angular θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(VII-8)}$$

ω se expressa em radiano por segundo (rad/s).

Você sabe desde o Capítulo IV como se medem taxas de variação: construindo o gráfico θ vs t e medindo coeficientes angulares de tangentes...

No presente caso há uma simplificação. O movimento sendo uniforme, θ varia linearmente com o tempo, de modo que sua taxa de variação é constante.

Como? Você não entende isto?

Então veja: a posição escalar s é a medida algébrica do arco AP.

E você sabe que um arco pode se medir pelo produto do raio pelo ângulo central.

De modo que $s = r\theta$.

Sendo o movimento uniforme, s deve ser função linear do tempo.

E como r é constante, segue-se que θ deve ser função linear do tempo.

Assim sendo...

Se você construir o gráfico $\underline{\theta}$ vs $\underline{t}$ para um movimento circular uniforme, você obterá um dos dois gráficos seguintes:

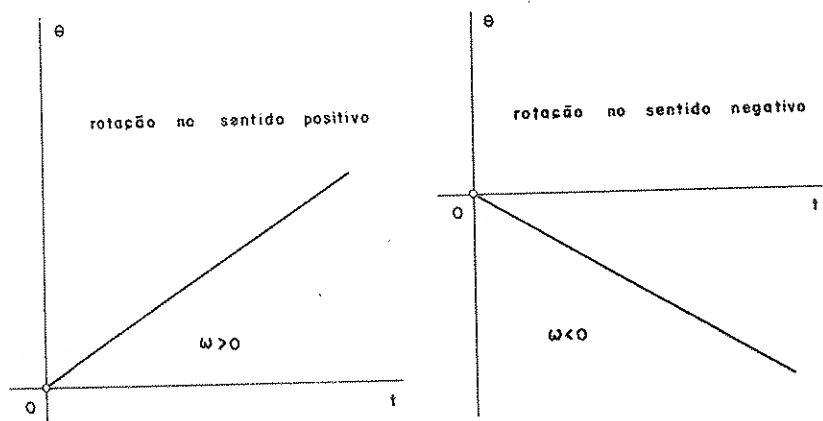



Figura VII-6

Você conclui logo que a taxa de variação de $\underline{\theta}$ é constante.

No movimento circular uniforme a velocidade angular $\underline{\omega}$ é constante.

$\underline{\omega}$ é positivo se a partícula girar no sentido positivo.

$\underline{\omega}$ é negativo se a partícula girar no sentido negativo.

E em qualquer caso, com as convenções de origens assinaladas,

$$\theta = \omega t \qquad \text{(VII-9)}$$

Substituindo $\underline{\theta}$ por $\underline{\omega t}$ em (VII-7), o vetor de posição do movimento circular uniforme se escreve:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \operatorname{sen} \omega t \end{pmatrix} \qquad \text{(VII-10)}$$

VII-3-3 Relação entre velocidade angular e velocidade escalar.

A expressão da posição escalar é

$$s = r\theta = r\omega t \qquad \text{(VII-11)}$$

Mas, sendo v a velocidade escalar constante (o movimento é uniforme):

$$s = vt \qquad \text{(VII-12)}$$

A comparação das expressões VII-11 e VII-12 lhe dá a relação entre a relação entre a velocidade escalar e a velocidade angular dé uma partícula em movimento circular uniforme.

$$v = \omega r \qquad \text{(VII-13)}$$

VII-3-4 Período do movimento - Frequência.

O período T de um movimento circular uniforme é o tempo que leva a partícula para dar uma volta.

Para achar T em função de $|\omega|$ você pode dizer: em T unidades de tempo a posição angular deve variar de 2π, em valor absoluto.

E então $2\pi = |\omega|T \rightarrow T = 2\pi/|\omega|$.

Ou também: em T segundos a posição escalar deve variar de $2\pi r$ em valor absoluto.

E então $2\pi r = |v|T \rightarrow T = 2\pi r/|v|$.

Lembrando-se que $|v| = |\omega|r$ você obterá ainda $T = 2\pi/|\omega|$ (VII-14)

A frequência ν é o inverso do período.

Fisicamente, representa o número de voltas dadas por unidade de tempo.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|\omega|}{2\pi} \qquad \text{(VII-15)}$$

A frequência se expressa em "rotações por segundo" (rps), ou "ciclos por segundo" (cps).

VII-3-5 Velocidade vetorial.

O segmento orientado que representa a velocidade vetorial tem como direção a da tangente à trajetória na posição atual da partícula.

Êsse segmento $\vec{v}$ é pois perpendicular ao segmento que representa o vetor de posição $\vec{r}$. (Fig. VII-7).

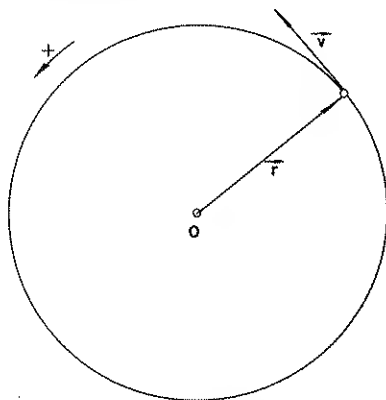



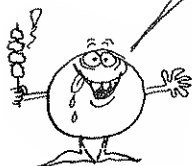
Figura VII-7

O sentido é o do movimento.

E o módulo é o valor absoluto $|\omega|r$ da velocidade escalar.

Há uma operação simples que permite transformar o vetor de posição de um movimento circular no vetor velocidade correspondente.

Ou seja há uma transformação simples que permite passar do vetor de posição de um movimento circular para o vetor que representa a taxa de variação da posição.

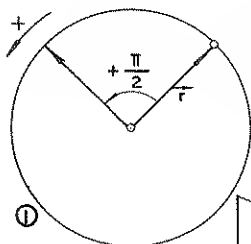
Pois você se lembra que o vetor velocidade mede a taxa de variação do vetor de posição, não é?

De mais a mais frequentemente, me acontecerá confundir, ao falar com você, uma grandeza vetorial e o segmento orientado que a representa gràficamente.

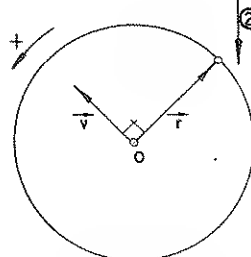
Todo mundo faz isto.

E é perfeitamente lícito desde que a gente saiba de que está se falando.

Não é por causa disto que você vai pensar que velocidade é uma flecha espetada na partícula.

Que nem churrasquinho...

Vamos então à operação; ela se processa em duas fases.

1a) gire o vetor de posição de $+\pi/2$.

2a) multiplique o vetor assim obtido pelo número al<u>gébrico ω</u>.

a partícula anda no sentido positivo: $\omega > 0$

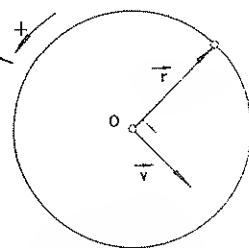



Figura VII-8

a partícula anda no sentido negativo: $\omega < 0$

A Fig. VII-8 mostra o que acontece. Não insisto.

Mas você deve olhar isto de muito perto, até entender perfeitamen - te.

Quais são as componentes do vetor velocidade em coordenadas carte - sianas?

É só seguir a regra enunciada acima.

Girar $\vec{r}$ de $\pi/2$ equivale a substituir θ por $\theta + \pi/2$.

$\cos\theta$ transforma-se em $-\text{sen}\theta$

$\text{sen}\theta$ transforma-se em $\cos\theta$

E depois multiplicamos tudo por ω .

Então vamos lá:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\text{sen}\theta \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de } + \pi/2]{\text{rotação}} \begin{pmatrix} -r\,\text{sen}\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

multiplicação por ω

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega r\,\text{sen}\theta \\ \omega r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega r\,\text{sen}\omega t \\ \omega r\cos\omega t \end{pmatrix} \qquad \text{(VII-16)}$$

Antes de nos despedir (provisòriamente) do vetor velocidade no movimento circular uniforme, é bom olhar tudo isto de um pouco mais alto.

Para vermos a partícula em movimento, associando-lhe pelo pensamento o seu vetor de posição e o seu vetor velocidade.

Daria mais ou menos o seguinte:

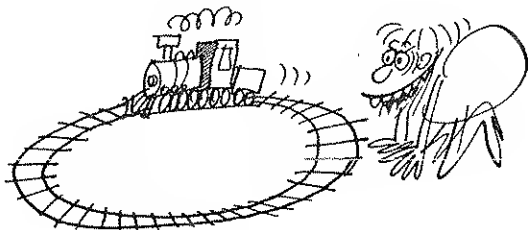
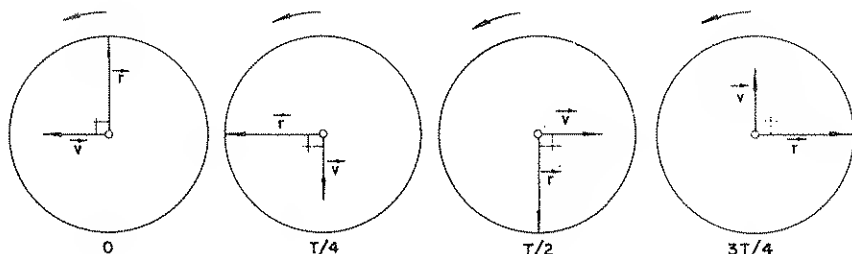



Figura VII-9

Você fará o desenho no caso do trensinho andar no sentido negativo da trajetória.

O que importa é o seguinte:

em todos os casos o vetor de posição e o vetor velocidade giram com a mesma velocidade angular ω e o vetor velocidade ADIANTA de $\pi/2$ sôbre o vetor de posição, no sentido do movimento.

De acôrdo?

VII-3-6 Aceleração vetorial.

Você não duvida mais da necessidade de uma aceleração.

O vetor velocidade varia com o tempo, não é mesmo?

O que aprendemos no Capítulo VI vai nos ajudar a fixar a posição do segmento associado à aceleração.

Na seção VI-5-1 daquêle Capítulo vimos que o segmento que representa o vetor aceleração aponta sempre para a concavidade da trajetória (quando o segmento é construído a partir da partícula).

Para o interior da circunferência, no nosso caso.

E na seção VI-5-2 aprendemos que se o movimento fôr uniforme, os segmentos associados à velocidade e à aceleração devem ser ortogonais.

Então no movimento circular uniforme o vetor aceleração $\vec{a}$ (construído a partir da partícula) é centrípeto.

Como mostra a Fig. VII-10.

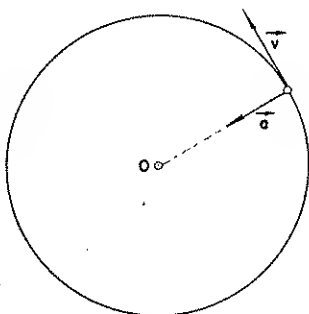



Figura VII-10

Mas não vá muito por palavras. Vá por seu raciocínio.

A Fig. VII-11 é uma representação perfeitamente lícita das grandezas vetoriais associadas a uma partícula em movimento circular uniforme.

Todos os segmentos orientados estão construídos a partir do centro da trajetória.

Todos são "centrífugos"...

Mas a Fig. VII-11 tem um outro mérito.

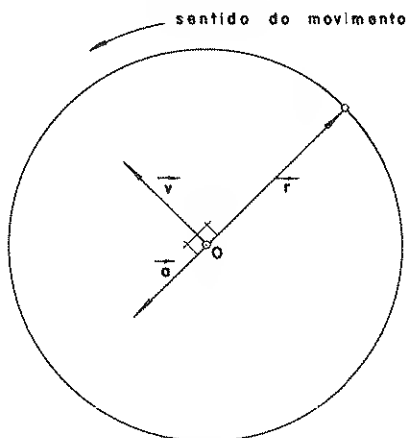
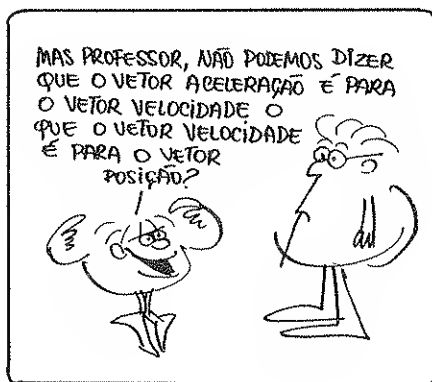



Figura VII-11

Ela mostra que o vetor aceleração <u>adianta</u> de $\pi/2$ sôbre o vetor velocidade, no sentido do movimento, girando êle também com a velocidade angular $\underline{\omega}$ dos dois outros...

A sugestão do Martins vai nos dar o módulo da aceleração vetorial.

A Fig. VII-12 consta de duas partes.

Em (1) representei a partícula na sua trajetória, com o vetor de posição $\vec{r}$ e o vetor velocidade $\vec{v}$ deduzido de r pela regra conhecida: "Gire de $+ \pi/2$ e multiplique por $\underline{\omega}$!"

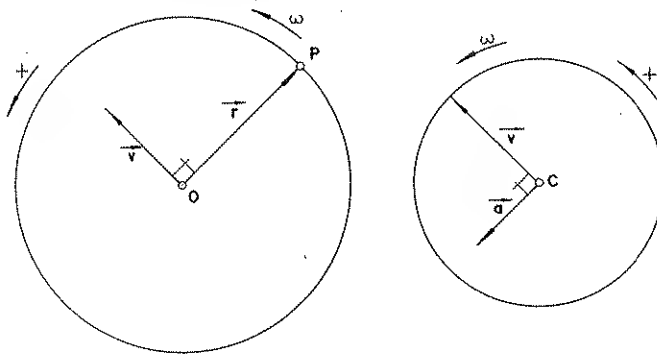



Figura VII-12

Ao lado, em (2), eu construi o segmento que representa a velocidade; a partir do ponto C.

Êsse segmento está girando no mesmo sentido que $\vec{r}$, com a mesma velocidade angular $\vec{\omega}$.

O segmento que representa $\vec{v}$ está variando com o tempo.

A sua taxa de variacão é representada por um segmento $\vec{a}$ obtido pela mesma regra: "Gire de $+ \pi/2$ e multiplique por $\underline{\omega}$!"

E o segmento $\vec{a}$ representa evidentemente a aceleração da partícula. Já que êle representa a taxa de variação da velocidade...

Qual é o módulo de $\vec{a}$?

É o módulo de $\vec{v}$ multiplicado por $|\omega|$.

$$|\vec{a}| = \omega^2 r \qquad \text{(VII-17)}$$

Isto se escreve também

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r} \qquad \text{(VII-18)}$$

As componentes de $\vec{a}$ em coordenadas retangulares deduzem-se das de $\vec{v}$ da mesma maneira que as componentes de $\vec{v}$ foram deduzidas das de $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -\omega r \operatorname{sen}\theta \\ \omega r \cos\theta \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de } +\pi/2]{\text{rotação}} \begin{pmatrix} -\omega r \cos\theta \\ -\omega r \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

multiplicação por ω

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r \cos\theta \\ -\omega^2 r \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 r \cos \omega t \\ -\omega^2 r \operatorname{sen} \omega t \end{pmatrix} \qquad \text{(VII-19)}$$

E se você compara com $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos\theta \\ r \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$ você conclui que:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \qquad \text{(VII-20)}$$

Resultado banal, talvez. A equação precedente diz que $\vec{a}$ e $\vec{r}$ têm sentidos opostos, e que você obtém $\vec{a}$ multiplicando $\vec{r}$ por $-\omega^2$.

Mas assim mesmo, resultado muito importante.

VII-3-7 Exemplos de movimentos circulares uniformes.

Você não estranhará se eu lhe disser que não existem na Natureza, movimentos rigorosamente circulares e uniformes.

A essa altura você já deve ter se acostumado.

Mas em primeira aproximação (dependendo do que se quer fazer com as observações...) não é muito difícil achar exemplos.

O movimento de quase todos os planêtas em tôrno do Sol, com exceção talvez de Mercúrio e Plutão, é circular uniforme.

Para lhe dar uma idéia de "quão circular" é a órbita da Terra, basta dizer que a diferença relativa entre a maior e a menor distância da Terra ao Sol é um pouco maior que três partes em cem.

Ou, se quiser, imagine uma circunferência de 100 metros de raio (o comprimento de um campo de futebol).

Em escala, a órbita real da Terra não se afastaria dessa circunfe-

rência de mais de um a dois metros, aproximadamente.

De modo que considerar o movimento anual da Terra como circular uniforme é uma primeira aproximação geralmente suficiente.

Mas quando se trata de explicar a diferença de três dias na duração do Verão e do Inverno, então aquelas três partes em cem são essenciais.

Depende do que você quer fazer...

Muitos satélites artificiais têm órbitas quase circulares.

No catálogo da NASA que tenho debaixo dos olhos, vejo por exemplo que o satélite 14F-628, lançado em 9 de Maio de 1963, tem uma diferença relativa de <u>uma parte em mil</u> entre o <u>apogeu</u> (distância máxima ao centro da Terra) e o <u>perigeu</u> (distância mínima.)

E se você quiser contemplar um movimento circular uniforme "caseiro", coloque um objeto qualquer (pequeno) sôbre o prato de um toca-discos.

E olha <u>por cima</u>.

VII-4 <u>Movimento harmônico simples</u>.

Suspenda uma lapiseira, ou uma pedra, a um elástico. E deixe oscilar.

Prenda uma bola de gude na beira de um disco <u>velho</u> (chiclete serve para prender), e ponha o disco a girar na vitrola...

...O disco está girando? Muito bem. Afaste-se de alguns metros e abaixe-se até que a sua linha de visão esteja no plano do disco.

Você está vendo a bola de gude efetuar (horizontalmente um movimento muito parecido com as oscilações verticais da pedra na extremidade do elástico.

Mas será mesmo que há algo em comum nêsses dois movimentos?

Há! são dois exemplos de movimento harmônico simples.

E com um pouco de habilidade você pode pendurar um pêndulo acima do toca-discos em que a bola de gude está girando (olhando por cima)... ou oscilando (olhando pelo lado).

E fazendo variar o comprimento do pêndulo você conseguirá que suas oscilações coincidam exatamente com as oscilações da bola.

Terá assim um novo exemplo de movimento harmônico simples: as oscilações da massa de um pêndulo.

Tudo o que vibra: molas e vigas, pontes suspensas, o relógio de parede do meu avô, as cordas do violão do Martins...e os átomos ou os íons de um cristal...

...tudo que vibra oscila harmônicamente se a amplitude das vibrações fôr suficientemente pequena.

Daí a Cinemática do movimento harmônico simples ter uma certa importância...

VII-4-1 <u>Definição do movimento</u>.

O movimento harmônico simples é um movimento <u>retilíneo</u> definido pela relação

$$a = -\omega^2 x \qquad \text{(VII-21)}$$

A aceleração escalar <u>a</u> do movimento é proporcional à posição escalar <u>x</u> e de sinal contrário.

Veremos que a definição (VII-21) justifica o movimento <u>visto de lado</u> da bola sôbre o disco como exemplo de movimento harmônico simples.

Quanto aos outros exemplos, a Dinâmica se encarregará de enquadrá-los na mesma definição.

No movimento harmônico simples a posição escalar <u>x</u> é geralmente chamada de <u>elongação</u>.

Antes de iniciarmos uma conversa mais formal sôbre êsse movimento, tentemos obter algumas informações pela intuição física, pelo raciocínio... e pelo bom senso.

Em primeiro lugar, o movimento é limitado no espaço.

Significo por isso que a elongação <u>x</u> não pode ter valor infinito, qualquer que seja o tempo que você deixa decorrer desde o início.

Na Fig. VII-13, representei a trajetória x'x, a origem O das elongações, e a partícula P numa posição qualquer.

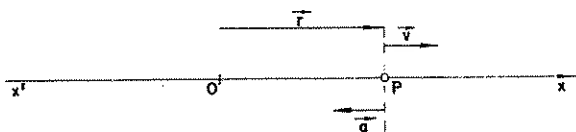



Figura VII-13

Nêsse instante a elongação é $x = \overline{OP}$, o vetor de posição é $\vec{r}$ e o vetor aceleração é $\vec{a}$.

A partícula é <u>sempre</u> acelerada em direção à origem.

Suponha que a velocidade seja $\vec{v}$ dirigida para os x positivos.

O módulo de $\vec{v}$ pode ser grande... muito grande.

Mas será <u>finito</u>.

Ora, no instante considerado, êsse módulo está decrescendo, já que $\vec{a}$ e $\vec{v}$ têm sentidos contrários.

Se o módulo da velocidade decresce — <u>e êle decrescerá enquanto a partícula estiver à direita da origem e indo no sentido positivo</u> — a partícula acabará parando.

Isso é inelutável.

De modo que o movimento é limitado do lado dos <u>x</u> positivos.

Agora veja o que acontece: a partícula vai iniciar nova viagem indo para os <u>x</u> negativos, acelerando enquanto estiver à direita da origem.

Mas começando a decelerar assim que passar pela origem e continuando a decelerar enquanto estiver à esquerda de O indo para os <u>x</u> negativos.

Ela acabará parando, inelutàvelmente: o movimento é também limitado do lado dos <u>x</u> negativos.

E a história recomeça:

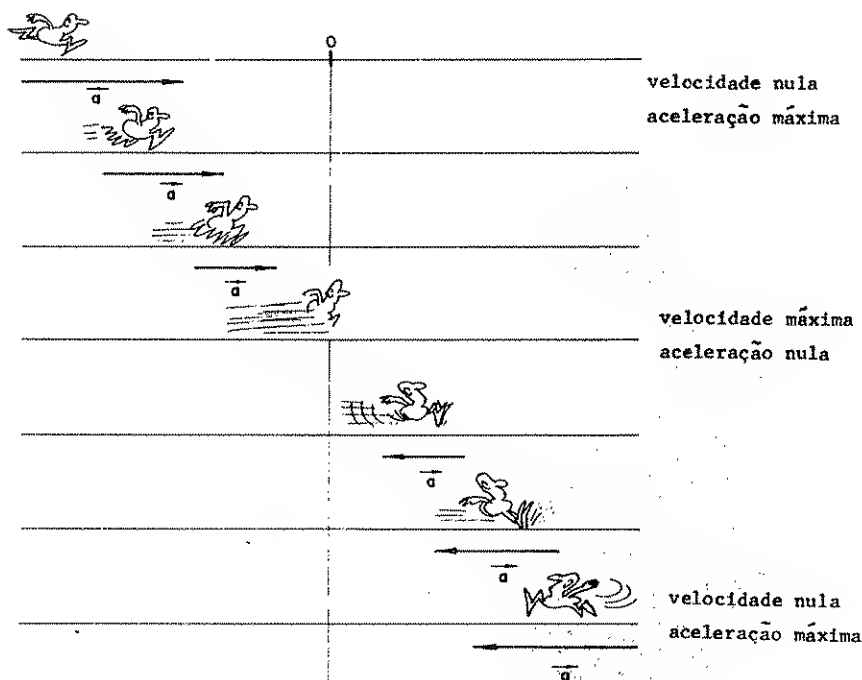



Figura VII-14

O movimento é pois, necessàriamente, oscilatório.

Acho que um pouco de meditação o convencerá também que as posições externas dêsse movimento oscilatório são simétricas em relação à origem.

O valor absoluto da elongação máxima, isto é, a distânlia máxima atingida pela partícula a partir da origem é chamada amplitude.

Representaremos a amplitude pelo símbolo A.

VII-4-2 Expressão da elongação em função do tempo.

Vamos pela ordem.

Considere (Fig. VII-15) duas partículas que no instante zero estão

à mesma distância da origem, com velocidade nula.

Figura VII-15

E suponha que para as duas partículas a mesma lei $a = -\omega^2 x$ se aplica.

Com o mesmo valor do coeficiente ω^2.

Acho que podemos concordar em que os movimentos subsequentes das duas partículas serão idênticos, não é mesmo?

Mesma "situação" inicial; diz-se em Física: mesmas condições iniciais.

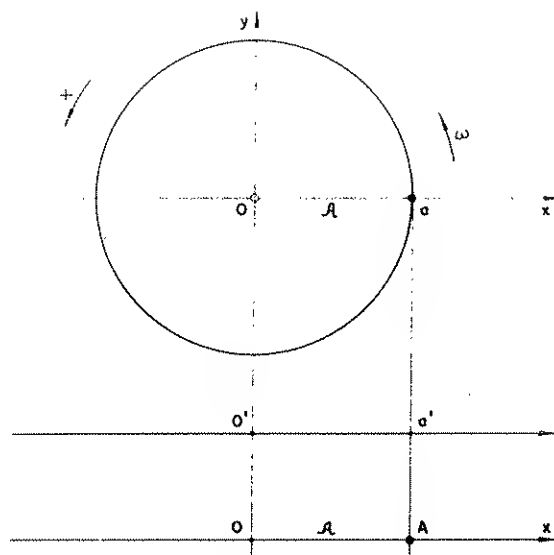
E mesma lei do movimento.

Dito isto, queremos achar a relação entre a elongação x e o tempo t no caso de uma partícula em movimento harmônico simples.

Tomaremos como origem dos tempos o instante em que a partícula se encontra na posição de elongação máxima do lado dos x positivos, com velocidade nula:

$$\text{em } t = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = A \\ v = 0 \end{array}$$

Construamos a perpendicular em O à trajetória e tomando sôbre essa perpendicular um ponto qualquer o como centro, tracemos uma circunferência de raio A (Fig. VII-16).

Seja oa o raio paralelo a OA e de mesmo sentido.

instante zero

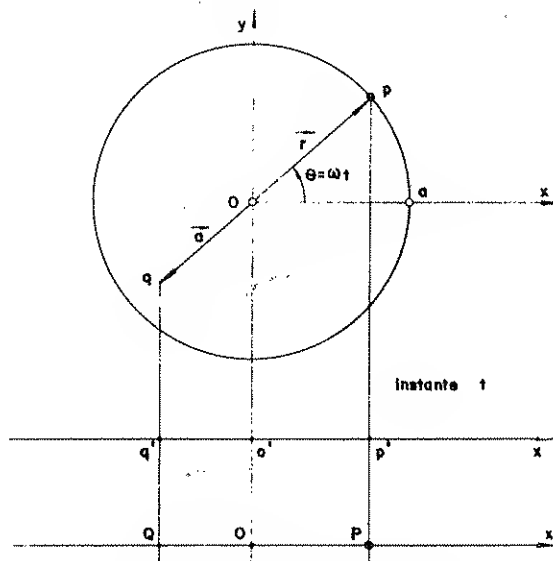



Figura VII-16 e Figura VII-17

Coloquemos uma partícula em a e imponhamos a essa partícula de descrever a circunferência com velocidade angular constante ω.

Como? Qual ω?

O mesmo ω positivo (por convenção) que aparece na lei imposta à partícula em movimento harmônico simples:

$$a = -\omega^2 x$$

Antes de prosseguir seria talvez razoável que você se convença que êsse ω é realmente o inverso de um tempo, não acha?

Construída a circunferência, e colocada a partícula, eu traço um eixo qualquer paralelo a Ox e eu projeto a partícula em a' sôbre êsse eixo.

Tudo pronto?

Larguemos tudo!

A partícula em movimento harmônico simples (eixo Ox) oscila harmonicamente, com a lei $a = -\omega^2 x$, a partir das condições iniciais $\{x = A \quad v = 0\}$.

A partícula em movimento circular uniforme gira no sentido positivo com velocidade angular ω .

E a projeção dessa partícula?

A projeção p' tem como posição escalar a componente - x do vetor de posição $\vec{r}$.

Essa componente é $x = A \cos \omega t$.

A aceleração da projeção p' é a componente - x do vetor aceleração $\vec{a}$.

Sua componente é $a = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$.

De modo que existe, entre a posição e a aceleração da projeção p' da partícula em movimento circular, a mesma relação que entre a posição e a aceleração da partícula P em movimento harmônico simples.

E tem mais! As condições iniciais impostas a p' são idênticas às condições iniciais impostas a P.

Concluímos que o movimento de p' é indistinguível do movimento de P.

Você entende agora porque o movimento da bola de gude no disco que gira é um movimento harmônico simples quando você olha de lado?

É que ao olhar de lado, você transforma o universo bidimensional do movimento circular uniforme em mundo unidimensional. Você vê a bola oscilar (e não mais girar). E se você pudesse materializar os vetores associados à partícula em movimento circular, você veria as projeções dêsses vetores sôbre uma reta perpendicular a sua linha de visão.

Essas projeções representariam para você as grandezas vetoriais correspondentes do movimento harmônico simples (*).

Ora, aceleração e posição do movimento circular são ligadas pela relação $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$. Em projeção você vê $a = -\omega^2 x$!

Mas queríamos mesmo é chegar à relação entre a elongação x e o tempo t.

Já sabemos que é

$$x = A \cos \omega t \qquad \text{(VII-22)}$$

O gráfico x vs t é dado pela Fig. VII-17. É uma senóide.

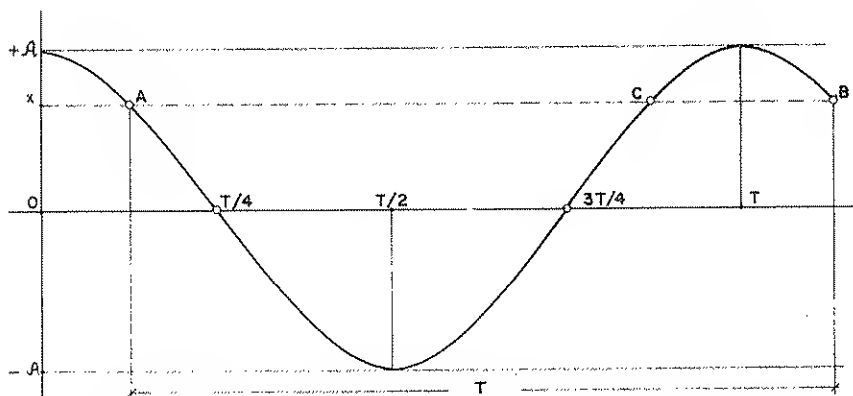



Figura VII-18

(*) Essa materialização é conseguida de maneira convincente no filme "Movimento harmônico" da série PSSC.

VII-4-3 <u>Período do movimento</u> - <u>Frequência</u>.

É evidentemente o mesmo que o período da partícula P no movimento circular uniforme.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(VII-23)}$$

A frequência é também

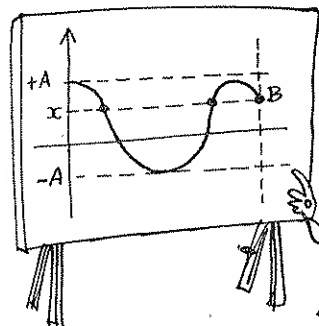
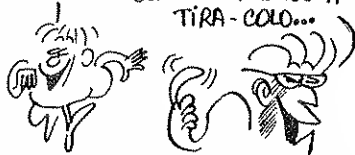
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(VII-24)}$$

Há no entanto algo que vale a pena assinalar. Nos movimentos harmônicos simples, os Físicos costumam chamar ω de <u>frequência angular</u>... e por preguiça acabam dizendo <u>frequência</u>... sem mais.

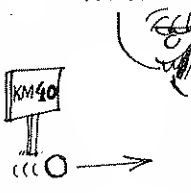
Tente não confundir.

MARTINS E EU

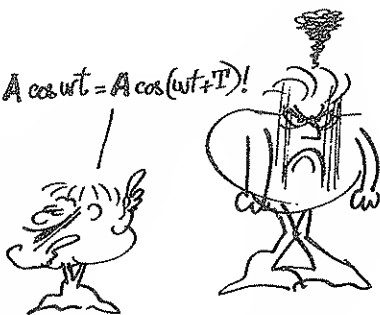
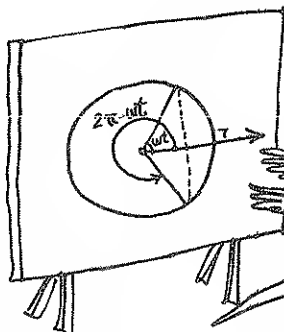
MAS ENTÃO SE NÃO TIVESSE O RECURSO DO MOVIMENTO CIRCULAR, O SENHOR NÃO PODERIA DETERMINAR O PERÍODO?
GRÁU DEZ PELA PERGUNTA MARTINS!

APOIADO! MAS NÃO FAZ MAL. EFETIVAMENTE, O MOVIMENTO CIRCULAR FOI UM MEIO AUXILIAR PARA ESTUDAR O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES. É ÓBVIO QUE VOCÊ ENCONTRARÁ SEUS MOVIMENTOS HARMÔNICOS SEM MOVIMENTOS A TIRA-COLO...
EU NÃO MEREÇO TANTO...

+A
x
-A
B
VOLTEMOS À EXPRESSÃO DA ELONGAÇÃO x=A cos ωt. O PERÍODO É O TEMPO NECESSÁRIO PARA A PARTÍCULA VOLTAR A TER A MESMA ELONGAÇÃO, INDO PARA O MESMO LADO. É, POR EXEMPLO, O TEMPO QUE SEPARA AS POSIÇÕES A e B DO GRÁFICO DA FIGURA VII-18. A PROPÓSITO MARTINS, PORQUE NÃO SERIA O TEMPO QUE SEPARA AS POSIÇÕES A e C?
A e C CORRESPONDEM À MESMA ELONGAÇÃO x, NÃO É MESMO?

SIM SENHOR! MAS NO INSTANTE CORRESPONDENTE AO PONTO "A", A PARTÍCULA VAI PARA OS x NEGATIVOS...
KM 40

ENQUANTO QUE NO INSTANTE CORRESPONDENTE AO PONTO C ELA VAI EM SENTIDO CONTRÁRIO...
KM 40

UÉ! COMO É QUE VOCÊ DESCOBRIU ISTO?
TRACEI TANGENTES E MEDI COEFICIENTES ANGULARES...

AH! SIM ... BEM... MAS VOLTEMOS AO ASSUNTO, SE T FOR O PERÍODO, A EXPRESSÃO A cos{w×tempo} DEVE TOMAR O MESMO VALOR NO INSTANTE t E NO INSTANTE t+T, DE MODO QUE ...

A cos wt = A cos(wt+T)!

2π-wt
wt
T
A IGUALDADE DOS COSENOS SE VERIFICA PELA PRIMEIRA VEZ QUANDO wt+T= 2π-wt...
ESTA SOLUÇÃO NÃO NOS SERVE PORQUE NOS DARIA O PONTO C...

MAS O QUE QUEREMOS É wt+T=wt+2π !!

O QUE NOS FORNECE T= 2π/w !
OBRIGADO PROFESSOR...

VII-4-4 Velocidade e aceleração.

A velocidade e a aceleração escalares de um movimento harmônico simples são respectivamente as componentes ao longo da trajetória da velocidade e da aceleração vetoriais do movimento circular uniforme que pode sempre ser associado ao movimento harmônico.

Com as convenções de origens e as condições iniciais escolhidas desde o início podemos escrever imediatamente:

$$v = -\omega A \text{ sen } \omega t \qquad \text{(VII-25)}$$

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x \qquad \text{(VII-26)}$$

Os gráficos são também senóides, e não vão dar muito trabalho.

Basta se lembrar da propriedade fundamental das grandezas vetoriais associadas ao movimento circular uniforme: a velocidade adianta de $\pi/2$ sôbre a posição, e a aceleração adianta de $\pi/2$ sôbre a velocidade, no sentido do movimento.

Como agora ω é por convenção positivo o que precede equivale a dizer que o vetor $\vec{a}$ da Fig. VII-19 precede o vetor $\vec{v}$, no tempo, de um quarto de período.

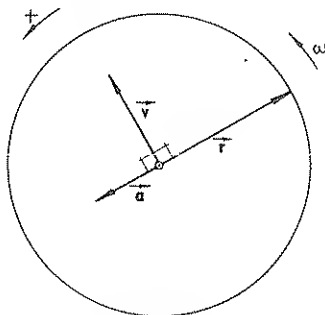



Figura VII-19

E da mesma maneira o vetor $\vec{v}$ precede o vetor $\vec{r}$, no tempo, de um quarto de período.

Certo?

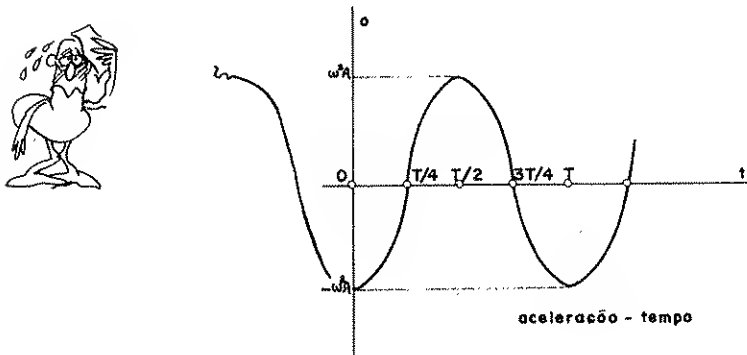
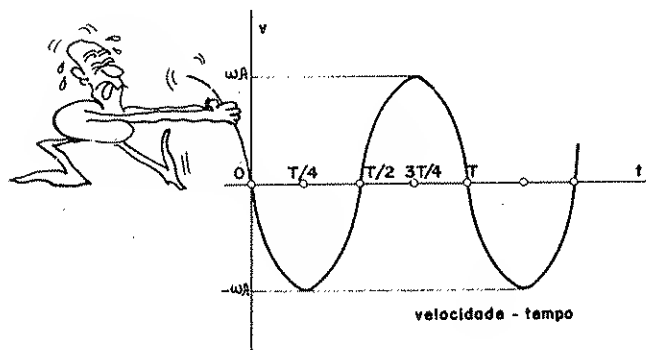
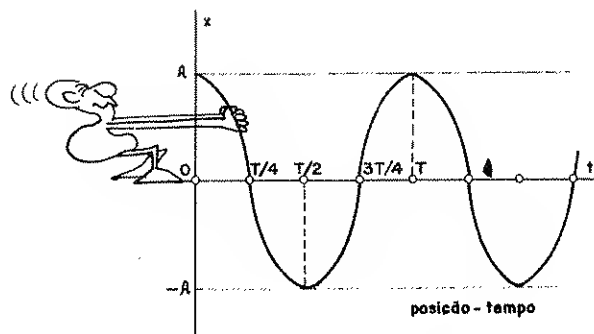
Então voltemos à senóide que representa a elongação x em função do tempo t no movimento harmônico (Fig. VII-18).

E escolhemos fatores de escala tais que nos gráficos v vs t e a vs t as grandezas ωA e $\omega^2 A$ sejam representadas pelo mesmo comprimento que o A da Figura VII-18.

O que impõe simplesmente às três senóides o mesmo "tamanho".

Então para obter o gráfico v vs t basta que você pegue a senóide x vs t e a puxe de um quarto de período do lado dos t negativos.

Fazendo isto, você está "adiantando" a curva de $T/4$. E você fará a mesma coisa para obter a senóide a vs t a partir da senóide v vs t.

O que dará o seguinte:

x
A
O
T/4
T/2
3T/4
T
t
-A
posição - tempo
v
ωA
O
T/4
T/2
3T/4
T
t
-ωA
velocidade - tempo
a
ω²A
O
T/4
T/2
3T/4
T
t
-ω²A
aceleração - tempo

PROBLEMAS PROPOSTOS

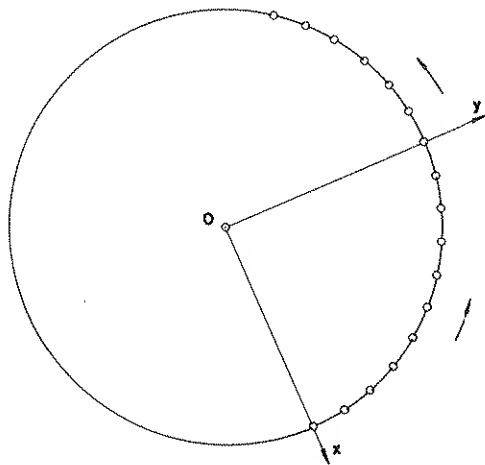
(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em sala com seu Professor).

VII-1 Se a trajetória de uma partícula fôr reta, a aceleração tem necessàriamente a direção da trajetória?

VII-2 Se a aceleração de uma partícula tem um módulo constante, a trajetória é necessàriamente uma reta ou uma circunferência?

*VII-3 Se o vetor aceleração de uma partícula é sempre perpendicular ao vetor velocidade, o movimento é necessàriamente circular uniforme?

*VII-4 Se o vetor aceleração de uma partícula é sempre perpendicular ao vetor velocidade e tiver módulo constante, o movimento é necessàriamente circular uniforme?

VII-5 A Figura é uma cópia de uma fotografia estroboscópica de uma partícula em movimento circular.

O intervalo entre duas exposições sucessivas é 1/20s.

O raio da trajetória era 40cm.

a) O movimento é uniforme?

b) Na afirmativa, qual é a velocidade angular?

c) Tome os eixos indicados e escôlha como origem dos tempos o instante em que a partícula passa pelo eixo 0x.

Qual é a posição angular em t = 1/5s? em t = 2/5s? em t = 3/4s?

d) Escreva as coordenadas polares da partícula nêsses mesmos instantes.

e) E a seguir as coordenadas cartesianas.

VII-6 Refira-se de novo à fotografia do movimento do Problema precedente. Faça uma cópia em papel transparente.

a) Construa com o fator de escala que você escolheu, os segmentos orientados que representam a velocidade da partícula nos instantes t = 1/5s; t = 2/5s; t = 3/4s.

b) Quais são as componentes cartesianas dêsses vetores?

c) Qual é a velocidade escalar nêsses mesmos instantes?

VII-7 Refira-se de novo à experiência do Problema VII-1.

Na fôlha de papel transparente que você guardou do problema VII-2, construa os segmentos orientados que representam a aceleração da partícula nos instantes t = 1/5s; t = 2/5s; t = 3/4s.

Quais são as componentes cartesianas dêsses vetores?

VII-8 Expresse a aceleração de um movimento circular uniforme em função do período T.

VII-9 O disco do estroboscópico com que fiz a fotografia do problema VII-1 tem três fendas igualmente espaçadas.

Qual é o período de rotação do disco?

VII-10 Um motor traz a indicação: 1200 RPM (rotações por minuto). Qual é o seu período?

VII-11 O Martins se lembra que, em criança, andou no cavalo de um carrossel.

Escôlha você mesmo um diâmetro e um período razoáveis para o carrossel e me diga qual era a velocidade escalar do Martins montado naquêle cavalo.

VII-12 Qual é a velocidade angular do ponteiro das horas de seu relógio?

Do ponteiro dos minutos?

Do ponteiro dos segundos?

*VII-13 Qual é a variação da posição vetorial da extremidade do ponteiro das horas de seu relógio entre 1:20 e 4:40?

VII-14 Voltando ao carrossel do Martins (Problema VII-7) suponha que êle tivesse a escôlha entre dois cavalinhos. Um na periferia, o outro "a meio raio".

Qual seria a razão entre as velocidades angulares se Martins tivesse montado sucessivamente nos dois cavalos? Entre as velocidades escalares?

Entre as acelerações?

*VII-15 Procure o valor da latitude do lugar onde você mora, bem como de qualquer outro dado necessário, e me diga qual é o valor da <u>sua</u> aceleração devida ao movimento de rotação diurno da Terra.

VII-16 E falando nisso, qual é o valor da aceleração de um Esquimó sentado no polo Norte geográfico, sempre devida à rotação da Terra?

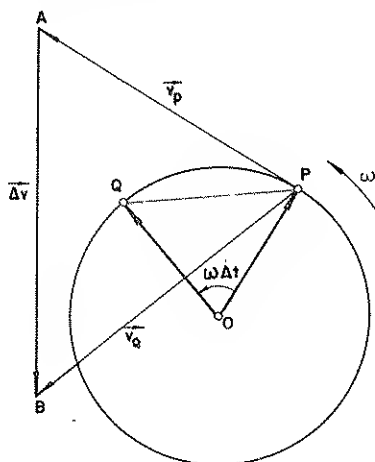
VII-17 Qual é a aceleração da Terra na sua órbita em tôrno do Sol?

VII-18 Qual era a aceleração do Satélite 14F.628? O raio da órbita era de

$10{,}03 \times 10^3$ km

e o período, 166,8 minutos.

*VII-19 Vamos procurar diretamente o vetor aceleração de um movimento circular uniforme, a partir dos conceitos básicos.

Considere uma circunferência de centro O, percorrida por uma partícula no sentido da seta, com velocidade angular constante $\underline{\omega}$.

Em determinado instante a partícula está em P e seu vetor velocidade é $\underline{\vec{v}_P}$. $\underline{\Delta t}$ segundo depois está em Q e seu vetor velocidade é $\vec{v}_Q$. Eu representei os dois segmentos correspondentes a partir do mesmo ponto P. Os módulos de $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_Q$ são iguais.

a) Mostre que os triângulos PAB e OPQ são semelhantes. Qual é a direção e qual é o sentido da variação $\overline{\Delta v}$ da velocidade no intervalo Δt? O que pode dizer dessa direção e dêsse sentido quando Δt é extremamente pequeno? E à propósito... "extremamente pequeno" em relação a que?

b) Pela semelhança dos triângulos PAB e OPQ, você tem

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{PQ} = \frac{|\vec{v}_P|}{OP} \rightarrow \frac{|\overrightarrow{\Delta v}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}_P|}{\Delta t} \cdot \frac{PQ}{OP} = \frac{\omega R}{\Delta t} \cdot \frac{PQ}{OP}$$

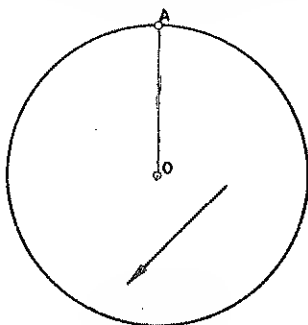
Faça aparecer a razão $\frac{PQ}{\text{arco } PQ}$ e passe ao limite, isto é, torne Δt extremamente pequeno. Qual é o limite do quociente $\frac{|\overrightarrow{\Delta v}|}{\Delta t}$?

E isto não é mesmo o módulo da aceleração?

VII-20 Qual é a velocidade média de uma partícula em movimento circular uniforme entre as passagens por duas posições diâmetralmente opostas?

VII-21 Qual é a velocidade média de uma partícula em movimento circular uniforme entre as passagens por duas posições "em quadratura" (as posições distam angularmente de $\pi/2$).

VII-22 Resolva os problemas VII-19 e VII-20 substituindo "velocidade média" por "aceleração média".

VII-23 Dou-lhe a posição inicial A de uma partícula em movimento circular uniforme e o vetor velocidade média durante um certo intervalo de tempo. Qual é a posição da partícula no final do intervalo?

Responda à mesma pergunta no caso do segmento dado representar a aceleração média no intervalo.

MARTINS E EU

O "TAL DE BOHR", COMO VOCÊ DIZ IRREVERENCIOSAMENTE, MARTINS, FOI UM DOS MAIORES FÍSICOS DE TODOS OS TEMPOS. NIELS BOHR NASCEU NA DINAMARCA EM 1885 E EM 1911 DOUTORAVA-SE EM FÍSICA EM COPENHAGUE... DEPOIS DE TRABALHAR NA INGLATERRA COM OS PROFESSORES J.J. THOMSON E RUTHERFORD, ÊLE VOLTOU PARA A DINAMARCA E LOGO ELABOROU A TEORIA QUE O TORNARIA CELEBRE: CONSEGUIA ÊLE, PELA 1ª VEZ NA HISTÓRIA DA FÍSICA, EXPLICAR SATISFATÓRIAMENTE OS FATOS EXPERIMENTAIS OBSERVADOS NA RADIAÇÃO EMITIDA PELO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO.

O MODÊLO DE BOHR ERA SÔMENTE UM PRIMEIRO PASSO EM FÍSICA ATÔMICAS, **MAS** UM PASSO DE GIGANTE. OS TRABALHOS CIENTÍFICOS DE BOHR (QUE FOI A ALMA DA CÉLEBRE "ESCOLA DE COPENHAGUE") VALERAM-LHE O PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA EM 1922. NIELS BOHR MORREU EM 1962...

VII-24 No modêlo de Bohr do átomo de hidrogênio o elétron gira em tôrno do nú cleo com movimento circular uniforme. O raio da órbita é $0,5 \times 10^{-10}$ m (0,5 Å Angstrom) e a frequência é 7×10^{15} por segundo.

Qual é a velocidade do elétron na sua órbita?

E agora preste atenção: o modêlo de Bohr teve sua utilidade em Física (grande aliás). Mas hoje em dia está largemente superado. Sabemos que o elétron <u>não</u> gira em órbita, feito um satélite em tôrno da Terra.

Na realidade sabemos muito o que o elétron <u>não faz</u>... e muito menos o que êle <u>faz</u>.

Mas isso é uma outra história.

O que eu queria dizer-lhe é o seguinte: você acaba de calcular a velocidade de um elétron naquêle modêlo ultrapassado de Bohr.

Pois bem.

Divida a velocidade que você acaba de encontrar pela velocidade da luz (3×10^{8} m/s).

Feito? O que você tem aí, o valor dessa razão, é o valor de uma das "grandes constantes" da Física, a chamada "constante de estrutura-fina".

Ela mede, grosso modo, a intensidade de interação eletromagnética.

Tudo isso para mostrar-lhe que o mundo é pequeno.

E que a Física também escreve reto por linhas tortas...

VII-25 A aceleração $\underline{a}$ de uma partícula em movimento harmônico simples é ligada à posição $\underline{x}$ pela relação $a = -4x$.

Qual é a frequência angular?

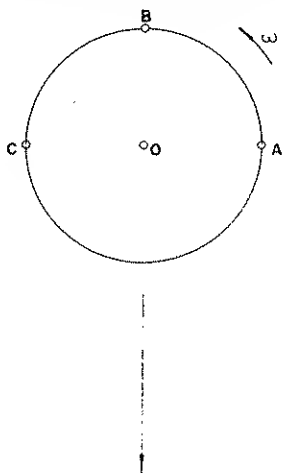
Qual é o período do movimento?

VII-26 Faça a experiência da pedra e do elástico. Como elástico, os utilizados nos escritórios servem. É só amarrar quatro ou cinco um no outro.

Pronto? Faça oscilar a sua pedra suspensa e meça o período. Meça também a amplitude (nem que seja "à vista").

Qual era o valor da velocidade máxima da pedra?

Qual era o valor da aceleração máxima?

VII-27 Você se lembra da bola de gude no disco girando na vitrola? Pois bem, temos agora três bolas de gude dispostas como mostra a Figura.

Você olha na direção indicada.

Qual das grandezas (posição, velocidade, aceleração) associadas às bolas B e C vistas por você variarão "em fase" com a posição de A? com a velocidade de A? com a aceleração de A?

Nota: variar "em fase" significa que as senóides associadas são "paralelas"..

VII-28 Jogando sinuca com um colega, o Martins bateu a bola assaz violentamente, perpendicularmente a uma tabela.

A bola repicou, voltou, bateu contra a tabela oposta, repicou...

"Ué! disse o colega, se não houvesse atrito essa bola teria um movimento harmônico simples".

"Tá louco! replicou o Martins. Vá aprender Física!"

O que é que você acha?

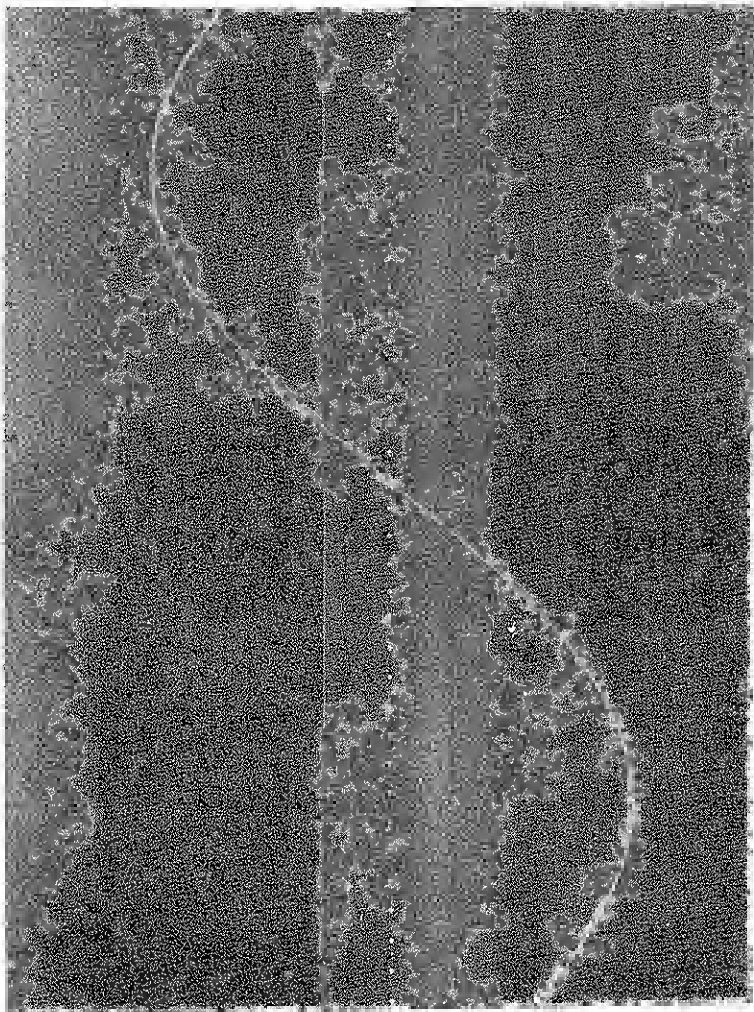
*VII-29 A Fotografia representa o gráfico elongação tempo de uma partícula que oscilava no Laboratório - O gráfico foi obtido diretamente com uma câmera giratória.

O eixo dos tempos é materializado pela reta pontilhada central.

Os pontos são os flashes sucessivos de um estroboscópio situado exatamente atrás da posição de equilíbrio da partícula.

O tempo que separa dois flashes sucessivos é

1/10 s

Você pode me dizer se êsse oscilador é "razoàvelmente" harmônico?

*VII-30 Qual seria a expressão da elongação em função do tempo, para um movimento harmônico simples, se você impusesse como condições iniciais: $x = 0$ e $v = v_o$ em $t = 0$?

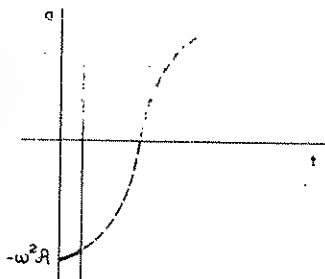
Junto com a lei $a = -\omega^2 x$, claro.

Quais seriam as expressões da velocidade e da aceleração?

VII-31 Uma partícula em movimento harmônico simples tem aceleração máxima igual a $1,0 \times 10^2$ cm/s^2, e velocidade máxima igual a 20cm/s.

Qual é a frequência angular?

Qual é a amplitude do movimento?

*VII-32 Olhe atentamente para a curva a vs t de um movimento harmônico simples, na vizinhança da origem (isto é, para valores pequenos de t).

Nessa região a aceleração varia muito lentamente: estamos perto de um mínimo da curva.

Que tal supormos que em primeira aproximação a aceleração é constante, e igual a $-\omega^2 A$?

Qual seria então, sempre na vizinhança de $t = 0$, a expressão da elongação em função do tempo? (Lembre-se que em $t = 0$, $x = A$ e $v = 0$).

Como sub-produto dêste exercício, você deve obter uma expressão aproximada de cos ωt para valores pequenos do argumento ωt.

Qual é essa expressão?

CAPÍTULO VIII

Cinemática vetorial: II - Aplicações

II { Mudanças de referenciais
Movimento dos projéteis }

VIII-1 Mudanças de referenciais no caso das translações.

VIII-1-1 Posição do problema.

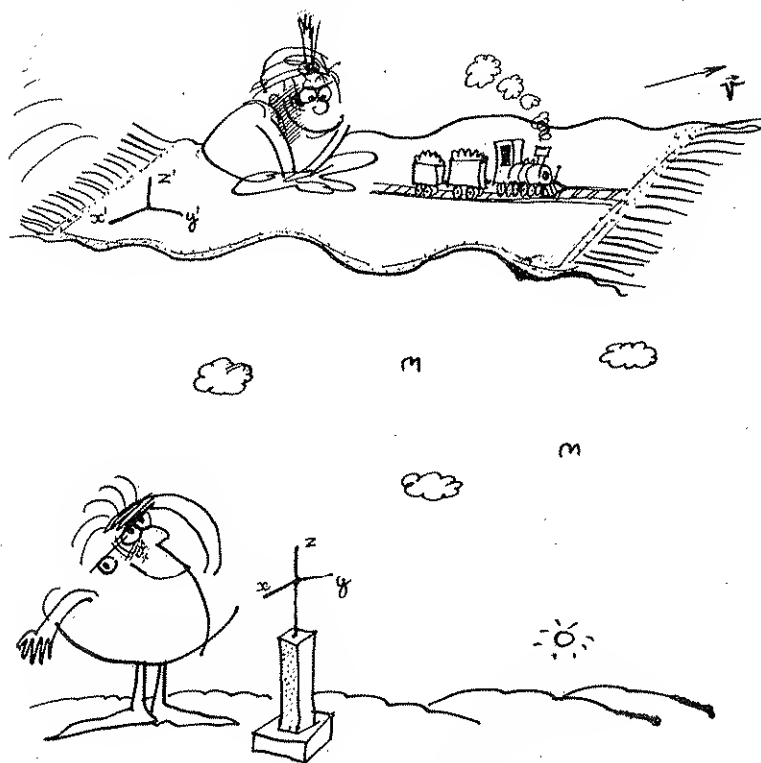



Figura VIII-1

A Fig. VIII-1 e eu, vamos tentar explicar-lhe o que é êste problema de mudança de referencial.

Há um fenômeno físico. No caso, um trenzinho que anda despreocupadamente sôbre o tapete voador do Martins.

O problema proposto a respeito dêsse fenômeno é um problema de Cinemática.

Qual é a trajetória do trem?

Qual é sua velocidade?

Qual é sua aceleração?

As respostas a essas perguntas dependem evidentemente do referencial em que nos colocamos para estudar o movimento.

Na Fig. VIII-1 há dois observadores.

O Martins, que faz questão de estudar todos os movimentos no referencial constituído pelo seu tapete, e no qual êle construiu um sistema de eixos (x' y' z').

Para êle, òbviamente, a trajetória do trem é a estrada de ferro.

E eu, na Terra, com o meu sistema de eixos (x y z).

Eu sou o que se convém chamar de <u>observador terrestre</u>.

E finalmente, para situar bem o problema, acrescento que o Martins e o seu tapete andam horizontalmente com velocidade constante $\vec{V}$ no referencial terrestre.

Eu insisto: todos os pontos do referencial - tapete têm no referencial terrestre a mesma velocidade constante $\vec{V}$.

Você conclui então que todos os pontos do referencial - tapete têm movimentos retilíneos uniformes no referencial terrestre.

Generalizemos: <u>se, em qualquer instante do movimento, todos os pontos de um referencial (S') têm velocidades iguais em um referencial (S), o referencial (S') está em translação no referencial (S)</u>.

Observe que não é necessário que a velocidade, comum a todos os pontos em determinado instante, se conserve constante no tempo.

No caso do tapete voador do Martins, ela se conserva efetivamente constante.

Mas na Fig. VIII-2 você pode ver um referencial (S') em translação no referencial terrestre (S), e a velocidade comum a todos os pontos de (S') vai aumentando. Trata-se também de um movimento de translação.

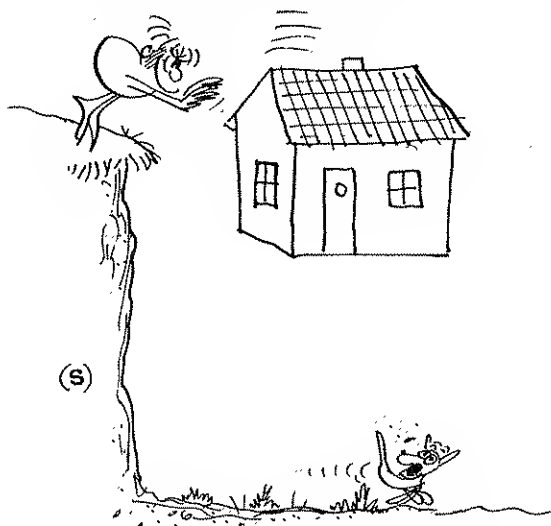



Figura VIII-2

Nos dois exemplos de translação citados acima, todos os pontos de um mesmo referencial têm trajetórias retilíneas no outro referencial.

Diz-se que a translação é retilínea.

Mas as trajetórias podem ser curvilíneas.

Você conhece a roda gigante.

Pois bem, cada carrinho da roda gigante tem um movimento de translação no referencial terrestre (Fig. VIII-3).

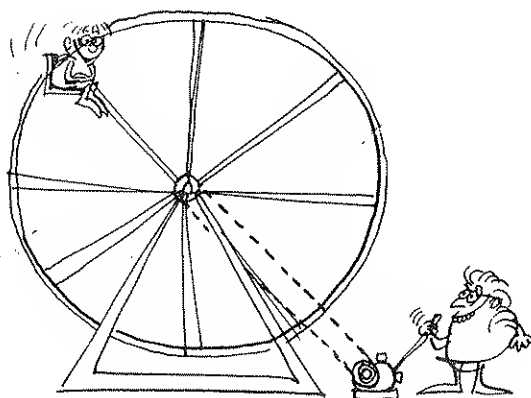



Figura VIII-3

Todos os pontos do carrinho têm, no mesmo instante, a mesma velocidade $\vec{V}$ no referencial terrestre.

Desta maneira (veja a Fig. VIII-4) o piso AC e o encosto AB do carrinho, que são respectivamente horizontal e vertical, continuarão tendo, no referencial ligado à Terra, a mesma orientação. O piso continua horizontal e o encosto vertical.

Ainda bem, aliás...

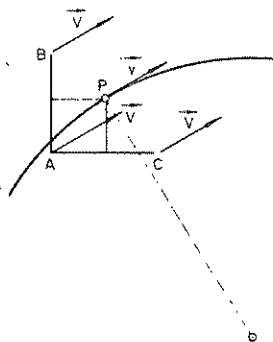



Figura VIII-4

A velocidade $\vec{V}$ comum a todoa os pontos é (por exemplo) a velocidade do ponto P em que o carrinho está amarrado à roda gigante.

Essa velocidade $\vec{V}$ é representada por um aegmento orientado tangente em P à roda.

O módulo de $\vec{V}$ é $|\omega|R$. ($\underline{\omega}$ representa como de costume a velocidade angular da roda).

Ouais são as trajetóriaa doa pontos do carrinho no referencial terrestre?

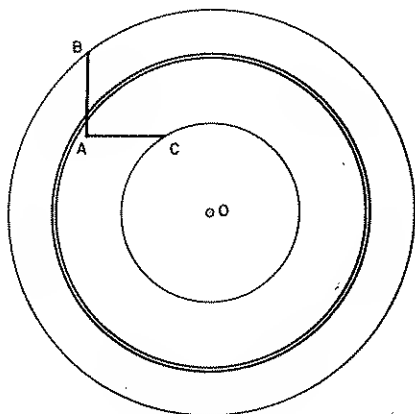



Figura VIII-5

São circunferências cujo centro O coincide com o centro da roda, como moatra a Fig. VIII-5.

...Maa felizmente que o Martina é perito em mudanças de referenciais...

MARTINS E EU

FIG. VIII-6

REALMENTE MARTINS, EU ESTAVA ERRADO... QUAIS SÃO ENTÃO AS TRAJETÓRIAS DOS PONTOS DO CARRINHO?

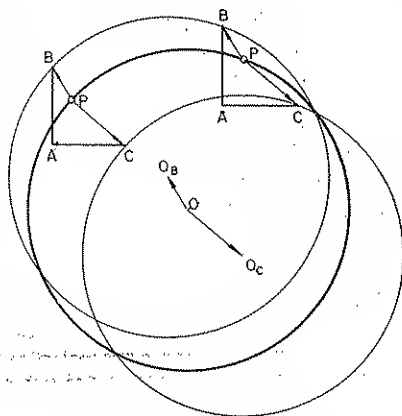



FIG-VIII-7

SE O CARRINHO CONSERVA SEMPRE A MESMA ORIENTAÇÃO NO ESPAÇO, ENTÃO O SEGMENTO ORIENTADO QUE PERMITE PASSAR DE "P" PARA "B" POR EXEMPLO, CONSERVA TAMBÉM A MESMA ORIENTAÇÃO E O MESMO COMPRIMENTO, NÃO É?

DE ACÔRDO! AFINAL DAS CONTAS O SEGMENTO ORIENTADO PB TAMBÉM FAZ PARTE DO CARRINHO.

ENTÃO PROFESSOR, A TRAJETÓRIA DE "B" DEVE DEDUZIR-SE DA TRAJETÓRIA DE P DA MESMA MANEIRA QUE O PONTO B DEDUZ-SE DO PONTO P.

A TRAJETÓRIA DE B É UMA CIRCUNFERÊNCIA IGUAL A RODA GIGANTE, MAS CUJO CENTRO É O PONTO O_B TAL QUE $\vec{OO_B} = \vec{PB}$.

E A TRAJETÓRIA DE "C" É OUTRA CIRCUNFERÊNCIA IGUAL A RODA GIGANTE E CUJO CENTRO O_C OBTEM-SE A PARTIR DE O PELA IGUALDADE $\vec{OO_C} = \vec{PC}$...

E ao mesmo tempo, o Martins desenhava no quadro a Fig. VIII-7, mostrando as trajetórias dos pontos B e C (pág. 345).

Tôdas essas trajetórias são paralelas entre si. Isso significa que elas se deduzem uma das outras por translações geométricas.

A circunferência descrita por B deduz-se da circunferência descrita por P pela translação geométrica caracterizada pelo segmento orientado $\overrightarrow{PB}$.

A circunferência descrita por C deduz-se da circunferência descrita por P pela translação geométrica caracterizada pelo segmento orientado $\overrightarrow{PC}$.

Resumamos o que aprendemos até agora sôbre referenciais em translação relativa.

Limitaremos o formalismo ao caso dos referenciais planos pois são os únicos que utilizaremos.

A fôlha do livro é um referencial que chamaremos (S). Êsse referencial possui um sistema de eixos (x y), como mostra a Fig. VIII-8.

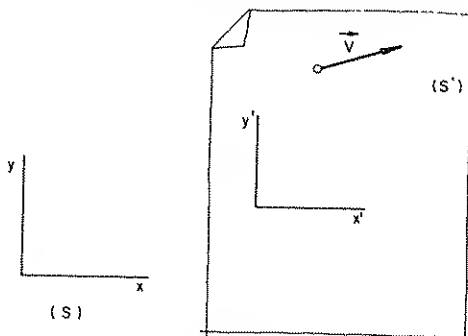



Figura VIII-8

Um outro referencial (S') é representado por uma fôlha de papel transparente que desliza sôbre a fôlha do livro.

O referencial (S') possui um sistema de eixos (x' y').

Já que (S') está por hipótese em translação em (S), as propriedades seguintes são verificadas:

1 - qualquer que seja o instante considerado, todos os pontos de (S') têm nêsse instante a mesma velocidade em (S).

É assim que, no instante registrado na Fig. VIII-8, todos os pontos de (S') tem em (S) a mesma velocidade $\vec{V}$.

2 - (S') conserva sempre em (S) a mesma orientação.

Significa isto, em particular, que os eixos de (S') deslo - cam-se paralelamente a êles mesmos.

Por esta razão, se os eixos de (S') forem escolhidos respec tivamente paralelos aos eixos de (S), êles permanecerão sempre paralelos a êsses eixos.

Podemos fazer isso sem particularizar o problema estudado?

Claro que podemos. Um fenômeno físico não depende da orientação dos eixos que a gente escolhe para estudá-lo.

A Natureza ignora os eixos coordenados.

Mas será que escolher os eixos de (S') paralelos aos eixos de (S) traz alguma vantagem?

Traz, sim. Simplifica os cálculos.

Um segmento orientado terá as mesmas projeções sôbre os dois sistemas.

E consequentemente a grandeza física correspondente terá as mesmas componentes nos dois referenciais.

3 - Todos os pontos de (S') descrevem em (S) trajetórias paralelas.

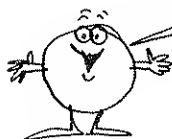
Se essas trajetórias são retas, a translação de (S') em (S) é dita <u>translação retilínea</u>.

Se as trajetórias são curvas, a translação é curvilínea.

Um caso importante de translação curvilínea é a translação circular.

O movimento de translação de um referencial (S') em outro referencial (S) é conhecido quando se conhece, em cada instante, a velocidade $\vec{V}$ comum a todos os pontos de (S').

$\vec{V}$ é em geral uma função do tempo.

Determinar a translação de (S') em (S) é fornecer a lei $\vec{V} = \vec{V}(t)$.

E podemos agora voltar ao problema do início.

Lembra-se? Estávamos brincando de trenzinho.

Vamos supor que o tapete do Martins está em vôo rasante.

O que permitirá raciocinar em duas dimensões.

Em (S'), a trajetória do trem é uma reta (D').

Eu escôlho uma reta para simplificar. Afinal das contas é o nosso primeiro problema de mudança de referenciais.

E o trem percorre essa reta com velocidade uniforme $\vec{v}'$, medida em (S') claro.

Comecemos então por escolher os eixos do referencial - tapete (S')

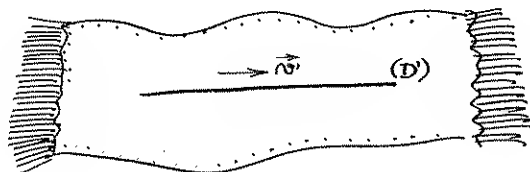



Figura VIII-9

e do referencial terrestre (S).

Já disse em algum lugar que a Natureza não deve se preocupar muito com a orientação dos eixos em cada referencial.

Mas não faz mal. Repito mais uma vez.

Nessas condições, vamos escolher os eixos que nos parecem mais simples.

Eu acho que podemos escolher o eixo O'x' do referencial-tapete coincidindo com a trajetória (D'), com o sentido positivo no sentido do movimento, como na Fig. VIII-10.

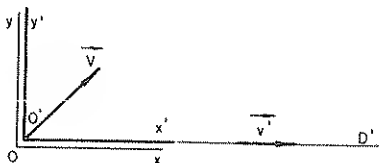



Figura VIII-10

E talvez a origem O' coincidindo com a posição do trenzinho...

...Está bem Martins! Coincidindo com a chaminé do trenzinho no instante zero.

Estamos de acôrdo?

Vamos agora aos eixos do referencial terrestre (S).

Já que (S') está em translação em (S), os eixos de (S') conservam sempre em (S) a mesma orientação.

Então escolheremos os eixos de (S) coincidindo com os de (S') no instante zero.

Falta ainda uma coisa.

Determinar a translação de (S') em (S).

Ou seja, dar a lei $\vec{V} = \vec{V}(t)$, lembra?

No caso, é muito simples: $\vec{V}$ é constante.

Para fixar as idéias, eu escôlho $\vec{V}$ fazendo em (S) o ângulo de $+ 45^o$ com o eixo Ox'.

Você acha difícil a tradução para o português?

Vamos lá juntos: supondo que o trem vá para Leste, o tapete do Martins vai para Nordeste. Tá?

E falta mais uma coisinha: os módulos de $\vec{v}'$ e de $\vec{V}$.

Suporemos que $|\vec{V}| = 2|\vec{v}'|$.

E agora estamos prontos para resolver nossoa problemas.

VIII-1-2 <u>O problema da trajetória</u>.

Conhecemos o movimento do trenzinho no referencial - tapete.

Você dirá, no caso geral: eu conheço o movimento da partícula em (S').

Conhecemos também o movimento de translação do referencial - tapete no referencial terrestre. Ou, se quiser, de (S') em (S).

O primeiro problema é achar a trajetória do trenzinho no referencial terrestre.

Antes de tentarmos a solução formal, "de colarinho e gravata", brinquemos um pouco.

UMA RETA!!

Primeiro, que espécie de trajetória você está esperando?

Um círculo? Uma parábola? Uma espiral? Um...

O que é que você acha?

Eu acho que o Martins está certo. Veja: o movimento do trem é retilíneo uniforme no referencial - tapete.

E o movimento do referencial-tapete é retilíneo uniforme no referencial terrestre.

Tudo do primeiro grau. Tudo linear...

Onde é que iríamos achar uma parábola, ou um círculo...?

Você acha que não estou demonstrando nada?

Claro que não! Mas estamos brincando, amigo. Estamos..., como diria?... Ah! já sei! Estamos farejando.

E se você soubesse como é gostosa, e proveitosa, a Física "de farejar"!

Mas você vai aprender também, não é mesmo?

Então estávamos dizendo que a trajetória do trenzinho no referencial terrestre tem que ser uma reta.

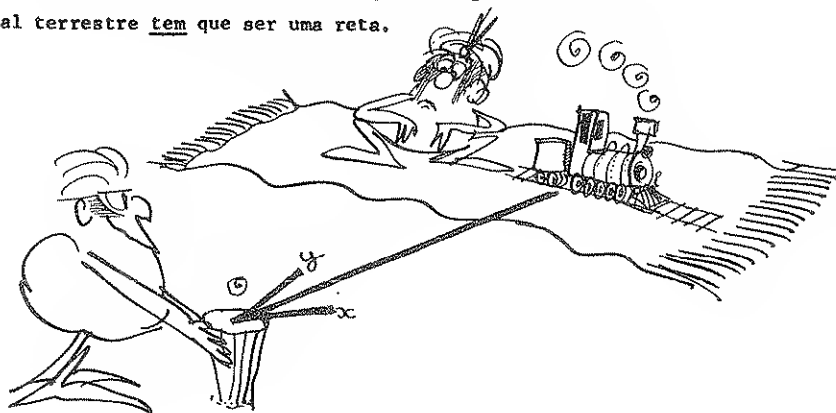



Figura VIII-11

Podemos mesmo acrescentar que essa trajetória deve estar contida no ângulo formado pelos eixos 0x e 0y. Porque veja: o trem sai da origem 0 e vai para a direita no tapete, enquanto que o tapete vai para cima... a grosso modo.

De modo que a trajetória deve ser algo parecido com a da Fig. VIII-11.

Será que podemos precisar um pouquinho mais essa direção?

Acho que sim. De outra maneira, mas tão instrutiva e útil quanto a precedente.

O modo de "farejar" que eu vou lhe mostrar agora poderia ser chamado, talvez, de "oito ou oitenta"...

Em geral a verdade fica mais para o meio...

Nem oito, nem oitenta.

Então vamos lá:

Oito: Suponha que o trenzinho estivesse parado em (S'): êle permanece na origem 0' dos eixos do referencial tapete. Então a trajetória em (S) coincide com a trajetória do ponto 0', e essa trajetória é definida pela velocidade $\vec{V}$. É a bissetriz do ângulo (0x, 0y). Como mostra a Fig. VIII-12.

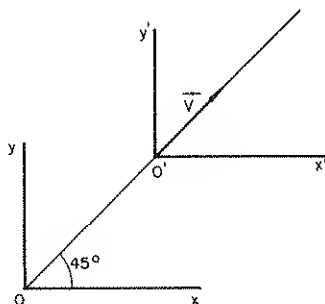



Figura VIII-12

Oitenta: Suponha agora que o módulo $|\vec{v}'|$ da velocidade do trenzinho em (S') seja muito, mas muito maior mesmo que o módulo $|\vec{V}|$ da velocidade do

tapete em (S): $|\vec{v}'| \gg |\vec{V}|$ (*).

Então o que vai acontecer é o seguinte: apenas o tapete terá começado a mover-se para afastar-se dos eixos (x y) de (S) que o trem já estará a quilômetros de distância...onde?

Mas na direção O'x' que coincide, ainda, com Ox. Ou quase.

A trajetória nêste caso é o próprio eixo Ox, como mostra a Figura VIII-13.

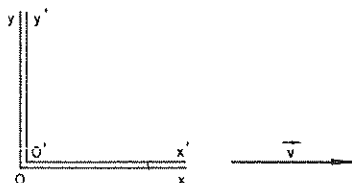



Figura VIII-13

Nem oito nem oitenta: a trajetória em (S) é uma reta situada no ângulo formado pelo eixo Ox e pela bissetriz do ângulo (Ox, Oy).

Bem, agora que "esquentamos" no assunto, podemos botar o colarinho e a gravata.

Formalmente, a trajetória de um móvel é a curva descrita pela extremidade do vetor de posição, no decorrer do tempo (Fig. VIII-14).

Ou melhor, do segmento orientado que materializa o vetor de posição.

Conheceremos a trajetória do móvel em (S) assim que soubermos determinar a lei $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Vejamos então nosso problema.

(*) O símbolo $\gg$ lê-se: "muito maior que".

E o que significa o símbolo $\ll$?

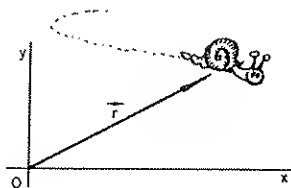



Figura VIII-14

A Fig. VIII-15 representa a posição da partícula (o trenzinho), no instante t.

Lembre-se que no instante zero a origem O' dos eixos de (S') coincidia com a origem O dos eixos de (S).

No instante t O' tem em (S) o vetor de posição $\vec{R}$ tal que

$$\boxed{\vec{R} = \vec{V}t} \qquad \text{(VIII-1)}$$

Concorda?

Observe que o segmento que representa $\vec{R}$ tem como direção a da bissetriz do eixo de (S).

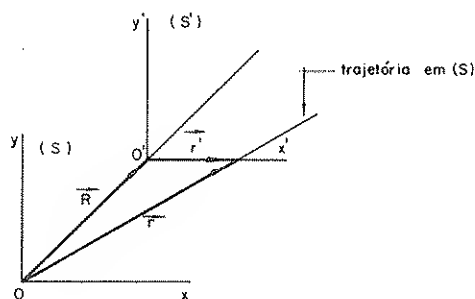



Figura VIII-15

Em (S') a partícula tem como vetor de posição $\vec{r}'$ tal que

$$\vec{r}' = \vec{v}'t \qquad \text{(VIII-2)}$$

E a direção do segmento que representa $\vec{r}'$ é o próprio eixo 0'x'. Pois foi assim que escolhemos os eixos de (S').

Qual é, no instante r, o vetor de posição da partícula em (S)?

Êle é representado na Fig. VIII- 5 pelo segmento cuja origem coincide com 0 e cuja extremidade coincide com a extremidade do segmento associado a $\vec{r}'$.

E você observa logo que

$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'} \qquad \text{(VIII-3)}$$

Se você substituir, na equação acima, $\vec{R}$ e $\vec{r}'$ pelas suas expressões (VIII-1) e (VIII-2) respectivamente, você obtém

$$\vec{r} = (\vec{V} + \vec{v}')t \qquad \text{(VIII-4)}$$

Ora, $\vec{V}$ e $\vec{v}'$ são dois vetores constantes. A soma $\vec{V} + \vec{v}'$ é pois constante.

E a equação (VIII-4) mostra que em (S) o movimento da partícula, do trenzinho, é também um movimento retilíneo e uniforme.

Confirmando, formalmente, o que já sabíamos.

A equação (VIII-4) nos diz também que a direção da trajetória deve ser a direção do segmento que representa a soma $\vec{V} + \vec{v}'$.

E a Fig. VIII-16 nos mostra que a direção desse segmento, e conse -

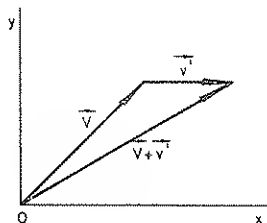



Figura VIII-16

quentemente da trajetória, está situada no ângulo formado pelo eixo Ox (direção de $\vec{v}'$) e pela bissetriz dos eixos (direção de $\vec{V}$).

Tudo como previsto.

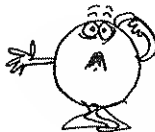
E finalmente, não esqueça o método que aprendeu no Problema VI-16.

Êle é utilizável para construir ponto por ponto <u>qualquer</u> trajetória relativa.

Basta ter paciência.

VIII-1-3 <u>O Problema da velocidade</u>.

Conhecendo-se o movimento da partícula em (S'), e em particular sua velocidade...

E conhecendo-se o movimento de translação de (S') em (S)...

...o problema é achar a velocidade da partícula em (S).

No caso do trenzinho o problema foi resolvido quase sem querer.

Foi um sub-produto da obtenção da trajetória.

Mas não é necessário achar a trajetória para determinar a velocidade do móvel em (S) em um instante qualquer.

Que tal "esquentarmos" um pouco no assunto?

Suponhamos primeiro que o trenzinho do Martins enguiçou.

A velocidade $\vec{v}'$ que o Martins mede no referencial tapete é zero.

Qual é a velocidade que eu meço no referencial terrestre?

Evidentemente a velocidade do ponto do tapete em que o trenzinho está parado. (Fig. VIII-17).

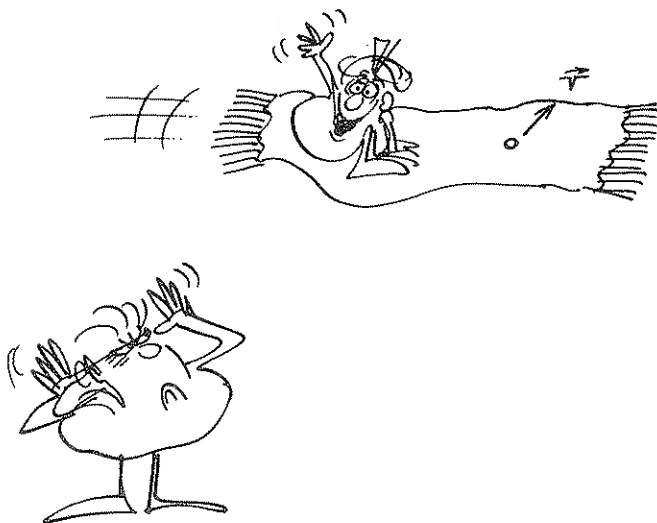



Figura VIII-17

Para maior clareza eu substitui o trenzinho do Martins por uma bola de gude.

O ponto de um referencial que coincide com uma partícula no instante qualquer t é chamado ponto coincidente do referencial no instante t.

De modo que, repito, se o trenzinho está enguiçado a velocidade que eu meço é a velocidade do ponto coincidente do refe[illegible]cial tapete.

Como todos os pontos do tapete têm, no mesmo instante, velocidades iguais, a velocidade que eu meço é essa velocidade ou seja: a velocidade de translação do referencial - tapete no instante t.

E, cúmulo da simplificação, a translação do tapete é retilínea uniforme com velocidade $\vec{V}$.

Ah! então se o tremzinho do Martins está enguiçado a velocidade que eu meço é a velocidade do ponto coincidente e essa velocidade é $\vec{V}$.

Vamos falar mais um pouco disto.

Temos tempo.

E eu acho que você vai gostar de entender muito bem.

O ponto importante é que o resultado fundamental a que chegamos independe do movimento do referencial - tapete no referencial terrestre.

Mesmo se o tapete do Martins estivesse em rotação (por exemplo) em tôrno de um eixo fixo no referencial terrestre, como na Fig. VIII-18, se o trenzinho está enguiçado eu medirei ainda a velocidade do ponto coincidente do tapete.

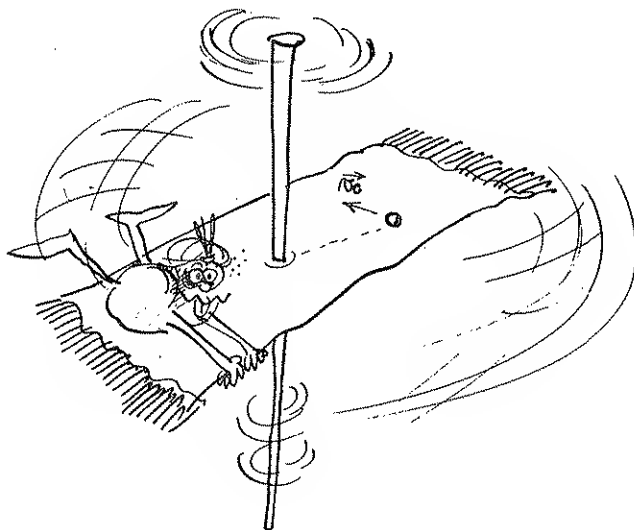



Figura VIII-18

A velocidade do ponto coincidente é a velocidade de um movimento circular.

Só que nêste caso os pontos do tapete não têm todos êles, no mesmo instante, a mesma velocidade.

Como acontece no caso da translação.

Mas eu medirei a velocidade $\vec{v_c}$ do ponto coincidente, naquêle instante.

Resumindo: qualquer que seja o movimento do referencial - tapete no referencial terrestre, a velocidade no referencial terrestre do trenzinho parado no referencial tapete é a velocidade do ponto coincidente dêsse referencial, no instante que eu efetuo a medida:

$$\text{se} \quad \vec{v}' = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v_c}$$

Eu tentei tornar o parágrafo precedente um pouco menos indigesto.

Não consegui.

Pare um pouco para tomar fôlego, e leia de novo com atenção.

Até entender tudo.

Suponha agora que o tapete do Martins esteja parado no referencial terrestre (Fig. VIII-18).

O trenzinho anda com velocidade $\vec{v}'$ no referencial - tapete.

Mas nêsse caso referencial - tapete ou referencial terrestre é a mesma coisa, não é?

Então a velocidade que eu meço no referencial terrestre é também $\vec{v}'$.

Eu acho aliás que podemos relaxar a condição que o tapete deva estar <u>todo êle</u> parado no referencial terrestre.

Basta que o ponto coincidente do tapete, no instante <u>t</u>, tenha velocidade nula no referencial terrestre.

Figura VIII-18

A Fig. VIII-19 mostra o Martins brincando de bola de gude sôbre uma plataforma giratória.

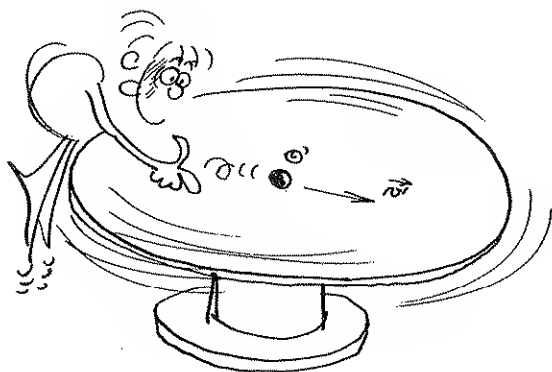



Figura VIII-19

No instante em que a cena é representada, a bola de gude passa pelo centro da plataforma com velocidade $\vec{v}'$ medida no referencial em rotação do Martins.

Qual é a velocidade que eu meço no referencial terrestre?

Eu meço $\vec{v}'$, claro.

Você objetará talvez que uma velocidade instantânea não é na realidade tão instantânea assim.

Sendo um limite, há que se preocupar com o que acontece um pouco antes e um pouco depois.

È você tem tôda razão.

Mas acontece que ao longo da trajetória da bola sôbre a plataforma as velocidades dos pontos coincidentes sucessivos tendem para zero à medida que nos aproximamos do centro.

Não são velocidades de movimentos circulares cujos raios tendem para zero?

E isto significa o seguinte: podemos isolar pelo pensamento, na vizinhança do centro da plataforma, uma região "tão em repouso quanto quisermos", no referencial terrestre, <u>durante o tempo que leva a bola para atravessá-la</u>.

Então enquanto a bola atravessa essa região ela está em um referencial em repouso no referencial terrestre. Com a aproximação que você quiser.

Resumindo: Se em determinado instante o ponto coincidente de (S') está em repouso em (S), então a velocidade $\vec{v}$ medida em (S) é igual à velocidade $\vec{v}'$ medida em (S'):

se $\vec{v_c} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v}'$

E depois dêsse longo périplo, tentemos concluir.

A velocidade $\vec{v}$ da partícula em (S) é uma expressão que deve reduzir-se à velocidade $\vec{v_c}$ do ponto coincidente quando $\vec{v}'$ é nulo, e à velocidade $\vec{v}'$ em (S') quando a velocidade $\vec{v_c}$ do ponto coincidente é nula:

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v_c} & \text{se} \quad \vec{v}' = 0 \\ \vec{v}' & \text{se} \quad \vec{v_c} = 0 \end{cases} \qquad \text{(VIII-5)}$$

Qual pode ser a expressão de $\vec{v}$?

Admitamos que essa velocidade $\vec{v}$ da partícula em (S) se expresse exclusivamente em função da sua velocidade $\vec{v}'$ em (S') e da velocidade $\vec{v_c}$ do ponto coincidente.

Acho que podemos concordar nisto.

Eu reluto em dizer que é uma questão de bom-senso. Às vêzes não é tão fácil assim descobrir de que lado está o bom-senso.

Mas, honestamente, eu não vejo outra possibilidade.

Nessas condições, a <u>única</u> expressão possível para $\vec{v}$ é

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_c}} \qquad \text{(VIII-6)}$$

A velocidade da partícula em (S) é igual à soma da velocidade da partícula em (S') e da velocidade em (S) do ponto coincidente de (S') no instante considerado.

Mais um esfôrço. Convença-se realmente que se $\vec{v}$ se expressar sòmente em função de $\vec{v}'$ e $\vec{v_c}$, a expressão (VII-6) é a única possível que satisfaça às condições (VIII-5).

No caso do referencial (S') estar em <u>translação</u> em (S), a velocidade $\vec{v}_c$ do ponto coincidente é a mesma, no instante considerado, que a velocidade de de qualquer outro ponto de (S').

A origem dos eixos por exemplo.

E se a translação fôr <u>uniforme</u>, como no caso do tapete voador do Martins, qualquer ponto coincidente tem um qualquer instante a velocidade $\vec{V}$ da translação.

E a velocidade em (S) é

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}} \qquad \text{(VIII-7)}$$

É exatamente o que dizia a equação (VIII-4), obtida ao procurarmos a trajetória do trenzinho do Martins no referencial terrestre.

Bem moçada, vamos deixar o último problema - o da aceleração - para logo mais.

Vocês têm direito a um pouco de descanço.

Mas aí, o Martins manifestou-se de novo.

DEMONSTRAÇÃO NO SENTIDO MATEMÁTICO TALVEZ NÃO MARTINS. O QUE FIZEMOS NESSAS ÚLTIMAS PÁGINAS É RECORRER À OBSERVAÇÃO, AO BOM SENSO E À INTUIÇÃO FÍSICA. A INTUIÇÃO FÍSICA É UMA PLANTA MUITO FRÁGIL QUE É PRECISO CULTIVAR DÊSDE CÊDO...

VOCÊ TALVEZ NÃO "DEMONSTROU" COMO ESTÁ ACOSTUMADO, MAS LHE GARANTO QUE, SE FEZ O ESFÔRÇO DE ACOMPANHAR A BRINCADEIRA, APRENDEU MUITO MAIS FÍSICA QUE NA "DEMONSTRAÇÃO"!

Mas para contentar a todos, a demonstração "rigorosa" da relação VIII-6 faz objeto do Problema VIII-20.

O que permitirá ao Martins botar o colarinho e a gravata.

Êle é tão engraçado de colarinho e gravata que eu tirei um retrato dêle.

É o da Fig. VIII-20.

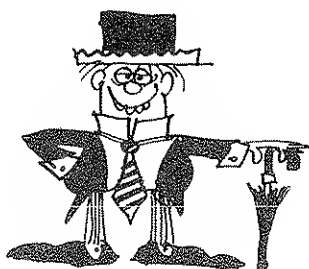



Figura VIII-20

O Martins de colarinho e gravata...

VIII-1-4 <u>O problema da aceleração</u>.

Tendo resolvido o problema da velocidade, o problema da aceleração não oferece dificuldade, <u>em se tratando de translação de (S') em (S)</u>.

Eu escrevo de nôvo o resultado fundamental da seção anterior:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_c} \qquad \text{(VIII-8)}$$

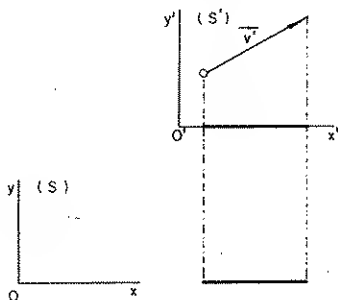
Se (S') está em translação em (S) todos os pontos de (S') são cinemàticamente equivalentes.

No mesmo instante todos êles têm a mesma velocidade $\vec{V}$.

E consequentemente a mesma aceleração.

Nêsse caso a equação (VIII-8) escreve-se

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad \text{(VIII-9)}$$

Tratando-se de uma translação, você se lembra que podemos, - e devemos -, para simplificar as contas, escolher os eixos de (S') paralelos aos de (S).

Figurs VIII-21

os eixos de (S') são paralelos aos eixos de (S).

$\vec{v}'$ tem as mesmas componentes nos dois sistemas.

<u>Uma vez escolhidos paralelos, êles permanecerão paralelos qualquer que seja o movimento de translação de (S') em (S).</u>

Então o segmento orientado que representa a velocidade $\vec{v}'$ da partícula em (S'), como na Fig. VIII-21, terá as <u>mesmas</u> projeções tanto sôbre os eixos de (S') como sôbre os eixos de (S).

Significa isto que o vetor $\vec{v}'$ terá ss <u>mesmas</u> medidas,... será representado pelos <u>mesmos</u> dois números,... ters as <u>mesmas</u> componentes, em (S) e em (S').

Sempre.

Ah! mas isto é muito importsnte.

Pois nessas condições eu posso fazer de conta <u>para os meus cálculos</u> (e sòmente para calcular claro) que os três vetores da equação (VIII-9) são

vetorea que pertencem ao meamo referencial (S).

Na realidade, aomente doia pertencem a (S).

lato é, aão medidos em (S).

São oa vetores $\vec{v}$ e $\vec{V}$.

O vetor $\vec{v}\,'$ é um vetor medido em (S') do momento que êle repreaenta a velocidade do móvel em (S').

Maa acabamoa de ver que ae fôaae medido em (S) êle teria a meama medida que em (S').

Eis porque eu poaao realmente fazer de conta que a equação (VIII-9) é uma equação eacrita em (S).

Neaaaa condiçõea, depoia de um intervalo de tempo muito pequeno dt oa vetorea $\vec{v}$ $\vec{v}\,'$ $\vec{V}$ terão reapectivamente variado de $d\vec{v}$ $d\vec{v}\,'$ $d\vec{V}$.

Teremoa, entre oa novoa vetores na relação análoga a (VIII-9) pois afinal daa contas, em cada inatante, a velocidade em (S) é a soma da velocida de em (S') e da velocidade de translação de (S') em (S):

$$\vec{v} + d\vec{v} = (\vec{v}\,' + d\vec{v}\,') + (\vec{V} + d\vec{V}) \qquad \text{(VIII-10)}$$

Maa lembre-ae de (VIII-9): $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$.

Se você aimplifica, (VIII-10) pasaa a se escrever:

$$d\vec{v} = d\vec{v}\,' + d\vec{V} \qquad \text{(VIII-11)}$$

A equação precedente relaciona a variação (vetorial) da velocidade do móvel em (S) com a variação de sua velocidade em (S') e a variação da velocidade de tranalação de (S') em (S).

Tudo iato aconteceu no intervalo dt.

Teremos as taxaa de variação correspondentes dividindo tudo por dt:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad \text{(VIII-12)}$$

E o que é isto, em Física?

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ é a aceleração $\vec{a}$ da partícula em (S). Por definição do que é aceleração.

$\frac{d\vec{v}'}{dt}$ é a taxa de variação <u>medida em (S)</u> de um vetor de (S').

Mas, felizmente para nós, êsse vetor tem <u>sempre</u> a mesma medida em (S) e em (S').

De modo que $d\vec{v}'$ tem também, <u>sempre</u>, a mesma medida em (S) e em (S').

Então eu posso considerar $\frac{d\vec{v}'}{dt}$ como sendo a taxa de variação, <u>medida em (S')</u>, do vetor $\vec{v}'$.

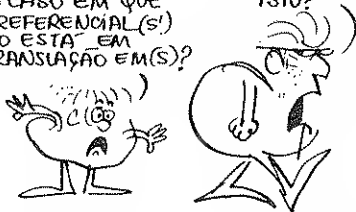
E assim sendo, $\frac{d\vec{v}'}{dt}$ é a aceleração $\vec{a}'$ da partícula em (S').

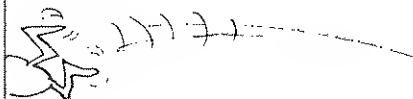
Finalmente, $\frac{d\vec{V}}{dt}$ é a aceleração $\vec{A}$ de translação do referencial (S') no referencial (S).

A equação (VIII-12) pode então escrever-se:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}} \qquad \text{(VIII-13)}$$

Veja a simplicidade dêsse resultado: <u>para referenciais em translação relativa, as acelerações compõem-se exatamente como as velocidades!</u>

MARTINS E EU

BEM, ENTÃO É QUE EU NÃO FUI SUFICIENTEMENTE CLARO! VOCÊ ESTÁ DISPOSTO A AGUENTAR MAIS UM POUCO DE GINÁSTICA MENTAL?

ESTOU!

MARTINS E EU

(*) PARA O QUE EU QUERO MOSTRAR AGORA, PODE. MAS NO CÁLCULO DO CASO GERAL, NÃO PODERIA. MARTINS TERIA QUE REPRESENTAR OS EIXOS DE (S') NA POSIÇÃO GENÉRICA E NÃO NUMA POSIÇÃO PARTICULAR.

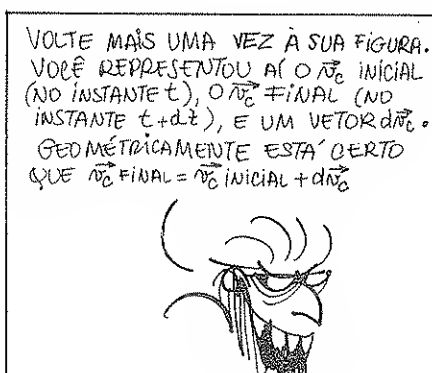
INSTANTE t+dt
REPRESENTE AGORA OS DOIS REFERENCIAIS, E A PARTÍCULA, NO INSTANTE t+dt. NÃO, MARTINS! NÃO COM OS MESMOS EIXOS DE (S')! NÃO ESQUEÇA QUE AGORA (S') NÃO ESTÁ MAIS EM TRANSLAÇÃO EM (S). OS NOVOS EIXOS DE (S'), NO INSTANTE t+dt, NÃO SÃO PARALELOS AOS ANTIGOS. ÊLES TERÃO ANDADO E GIRADO.

CERTO, PROFESSOR. MAS SE EU CHAMO AGORA $\vec{v}'_1$ A NOVA VELOCIDADE DA PARTÍCULA EM (S'), E $(\vec{v}_c)_1$ A NOVA VELOCIDADE DO PONTO COINCIDENTE, A NOVA VELOCIDADE $\vec{v}_1$ DA PARTÍCULA EM (S) AINDA SE ESCREVE $\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + (\vec{v}_c)_1$. O SENHOR CONCORDA?
CONCORDO MARTINS!

ORA, SEMPRE HAVERÁ UM VETOR $d\vec{v}$ TAL QUE $\vec{v}_1 = \vec{v} + d\vec{v}$, UM VETOR $d\vec{v}'$ TAL QUE $\vec{v}'_1 = \vec{v}' + d\vec{v}'$, E UM VETOR $d\vec{v}_c$ TAL QUE $(\vec{v}_c)_1 = \vec{v}_c + d\vec{v}_c$ ...
ÓTIMO! PROSSIGA...

BEM, PROFESSOR, ENTÃO A OPERAÇÃO QUE EU ESCREVI ACIMA, $\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_c)_1$ SE TRANSFORMA EM: $\vec{v} + d\vec{v} = \vec{v}' + d\vec{v}' + \vec{v}_c + d\vec{v}_c$ E COMO EU SEI QUE $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_c$, EU POSSO SIMPLIFICAR E OBTENHO $d\vec{v} = d\vec{v}' + d\vec{v}_c$!

ATÉ AQUI VOCÊ FOI ÓTIMO, PARABÉNS MARTINS. MAS CUIDADO A PARTIR DE AGORA...

O PONTO CRUCIAL É QUE NO INSTANTE $t+dt$, OS EIXOS DE (S') NÃO SÃO MAIS PARALELOS AOS DE (S), COMO ERAM NO CASO DA TRANSLAÇÃO. ORA, AO ESCREVER A SUA EQUAÇÃO $d\vec{v} = d\vec{v}' + d\vec{v}_c$, TUDO DEVE SER ESCRITO NO MESMO SISTEMA DE EIXOS. VOCÊ CONCORDA QUE NÃO FARIA SENTIDO NENHUM COMPARAR UM VETOR MEDIDO COM OS EIXOS DE (S) COM UM VETOR MEDIDO COM OS EIXOS DE (S') NÃO PARALELOS AOS DE (S)?

VOLTE MAIS UMA VEZ À SUA FIGURA. VOCÊ REPRESENTOU AÍ O $\vec{v}_c$ INICIAL (NO INSTANTE t), O $\vec{v}_c$ FINAL (NO INSTANTE t+dt), E UM VETOR d$\vec{v}_c$. GEOMÈTRICAMENTE ESTÁ CERTO QUE $\vec{v}_c$ FINAL = $\vec{v}_c$ INICIAL + d$\vec{v}_c$

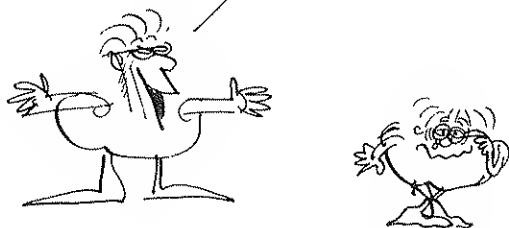
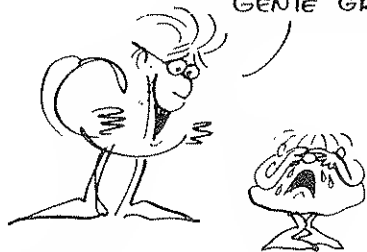
... e no caso geral pontos diferentes de (S') têm em (S) velocidades diferentes o que não acontece no caso da translação, em que, no mesmo instante, todos os pontos têm a mesma velocidade.

Lembre-se, na translação <u>todos</u> os pontos de (S') são cinemàticamente equivalentes.

O que responde a sua pergunta.

É bem verdade que também na translação o ponto coincidente muda de instante em instante.

Mas como todos êles são equivalentes, a diferença ($\vec{v}_c$ final)-($\vec{v}_c$ inicial) pode ser considerada como se aplicando a um mesmo ponto.

EIS PORQUE, NO CASO DA TRANSLAÇÃO $\frac{d\vec{v}_c}{dt}$ É REALMENTE A ACELERAÇÃO DE TRANSLAÇÃO DO SISTEMA.

Resumindo: no caso do referencial (S') estar em translação em (S), as acelerações compõem-se como as velocidades. A aceleração em (S) é a soma da aceleração em (S') e da aceleração do ponto coincidente.

Se (S') não está em translação em (S), a coisa é mais complicada. Vamos deixá-la para um Curso mais adiantado.

VIII-2 <u>Movimento dos projéteis</u>.

O assunto que vamos abordar agora é importante por várias razões.

A primeira é que, ao atirar uma pedra para o ar, quando você era criança, você fêz talvez a sua primeira experiência <u>controlada</u> de Física.

Você queria acertar um alvo (eu espero que não era a janela do vizinho), e você achou intuitivamente a velocidade inicial e a direção do tiro.

Ora, eu acho que vale a pena estudar de um pouco mais perto um fenômeno tão comum, tão fácil de reproduzir.

A segunda razão é que o movimento dos projéteis nos oferecerá uma excelente oportunidade de aplicar nossos conceitos básicos de Cinemática vetorial, e de mudanças de referenciais.

Será uma bôa ocasião de fazer bôa Física, sem muito formalismo matemático.

E finalmente, é o primeiro passo dado para entender a grande aventura do Espaço.

Pois conceitualmente, não há <u>nenhuma</u> diferença entre a pedra que você atirava e a nave espacial em órbita.

A pedra que você atira no ar também entra em órbita.

VIII-2-1 Um fato experimental fundamental.

No Capítulo VI, estudamos o movimento de um projétil. A Figura VI-1 era uma representação estroboscópica do movimento de uma bola atirada no ar por uma rampa de lançamento.

Naquela oportunidade, não estávamos particularmente interessados no movimento de um projétil. Queríamos um movimento qualquer bidimensional afim de aprendermos a determinar as componentes da posição, da velocidade, e da aceleração.

Mas assim mesmo chegamos a um resultado surpreendentemente interessante: a aceleração do movimento é constante.

Eu não irei até dizer que isto era totalmente inesperado.

Desde a Cinemática escalar sabíamos, também por experiência, que a aceleração de um corpo lançado verticalmente é constante.

Suspeitamos por outro lado que a causa dessa aceleração é a presença da Terra. E realmente confirmaremos isto em Dinâmica.

Ora, como é que a Terra iria reconhecer a direção de lançamento de um projétil?

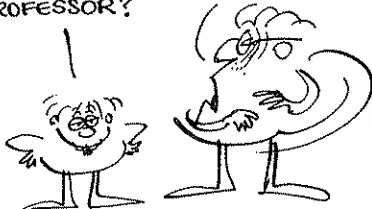
De modo que aceitaremos sem maior discussão o fato fundamental seguinte:

Qualquer que seja a direção de lançamento, um projétil é submetido a uma aceleração constante, desde que se despreze a resistência do ar e que as dimensões relevantes da trajetória sejam pequenas. Essa aceleração $\vec{g}$ pode ser representada por um segmento orientado vertical, dirigido para baixo, e cujo módulo é $9{,}81\ m/s^2$.

Interrompe o Martins.

MARTINS E EU

O QUE O SR. CHAMA DE "DIMENSÕES RELEVANTES" DA TRAJETÓRIA?
A ALTURA MÁXIMA ATINGIDA PELO PROJÉTIL POR EXEMPLO!

E "PEQUENAS" EM RELAÇÃO A QUE PROFESSOR?
EM RELAÇÃO AO RAIO DA TERRA.

MUITO PEQUENAS PROFESSOR?

MUITO PEQUENAS!

DEPENDE DO QUE VOCÊ QUER FAZER, COMO DE COSTUME. PRA NÃO NOS ALONGAR NESSE ASSUNTO, VAMOS FAZER O PROBLEMA VIII-26.

PUXA! O SENHOR NÃO DEIXA ESCAPAR NADA!

VIII-2-2 <u>Plano da trajetória</u>.

Uma partícula - o projétil - é lançada com velocidade $\vec{v}_o$ no referencial terrestre (S). Nêsse referencial a aceleração do projétil é $\vec{g}$, constante.

Os segmentos orientados que representam $\vec{v}_o$ e $\vec{g}$ determinam um plano <u>vertical</u> Π (Fig. VIII-24).

Figura VIII-24

A trajetória da partícula é necessàriamente contida no plano Π.

Por quê?

Mas simplesmente porque no instante do lançamento ela está no plano Π e que não tem nenhuma razão de sair dêsse plano!

Convença-se do fato que para sair do plano Π a aceleração $\vec{g}$ da partícula deveria ter uma componente perpendicular ao plano.

O que òbviamente não acontece.

Uma outra maneira de dizer a mesma coisa é a seguinte: o fato de lançar a partícula com uma velocidade $\vec{v}_o$ cuja direção é diferente da de $\vec{g}$ impõe à partícula um universo bidimensional. Êsse universo é o plano vertical Π de-

finido pelos segmentos que representam $\vec{v}_o$ e $\vec{g}$.

VIII-2-3 <u>Os eixos naturais no referencial terrestre</u>.

Na seção VI-2-3 do Capítulo VI, ao escolhermos os eixos no referencial terrestre, fomos levados naturalmente a escolher um dos eixos verticais.

A aceleração constante e vertical nos obrigava pràticamente a essa escôlha.

Mas pensando melhor, o outro eixo também nos é pràticamente imposto pela Física do fenômeno.

É o eixo definido pela velocidade de lançamento, ou <u>velocidade inicial</u> $\vec{v}_o$.

A Fig. VIII-25 mostra os eixos assim definidos: Ox na direção e no sentido de $\vec{v}_o$; Oy vertical e orientado positivamente para baixo: direção e sentido de $\vec{g}$.

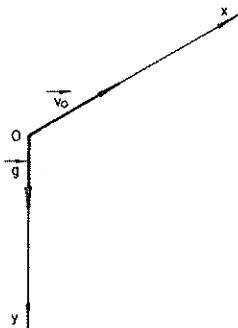



Figura VIII-25

Já estou prevendo a sua objeção: os eixos não são ortogonais, e até agora só trabalhamos com eixos coordenados ortogonais.

Mas não se preocupe.

Você perceberá que essa aparente dificuldade vai pelo contrário tornar as coisas muito mais simples.

E aproveitemos para aprender algo muito importante: a Física deve sempre predominar sôbre o formalismo matemático.

Antes de prosseguir, vejamos como se determinam as componentes de um vetor em eixos oblíquos.

A Fig. VIII-26 é auto-suficiente: pelas extremidades do segmento que representa o vetor, construa paralelas aos eixos.

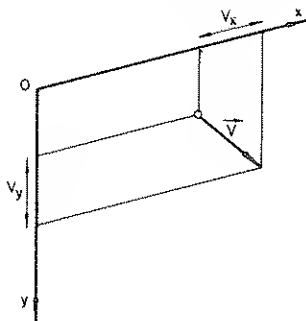



Figura VIII-26

Você obterá assim as componentes do vetor.

Da mesma forma que em eixos retangulares escreveremos

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

VIII-2-4 Componentes do vetor de posição em (S): mudança de referencial.

Queremos conhecer as componentes do vetor de posição $\vec{r}$ do projétil no referencial terrestre (S), com os eixos "naturais" que acabamos de escolher.

Nêsse referencial, o projétil é lançado da origem 0, no instante zero, com velocidade $\vec{v_o}$.

E tudo o que acontece depois vai depender exclusivamente dessas condições iniciais:

$$\text{em } t = 0 \rightarrow \vec{r} = 0; \quad \vec{v} = \vec{v_o}$$

Mudemos de referencial. Coloquemo-nos no referencial (S') assim definido: é um referencial em translação em (S) com a velocidade constante $\vec{v}_o$. Isso mesmo. Com a velocidade inicial do projétil.

Os eixos de (S') são O'x' e O'y'. Escolhemos êsses eixos de maneira tal que em t = 0 êles coincidem com os de (S).

No instante genérico t êles se apresentam como na Fig. VIII-27.

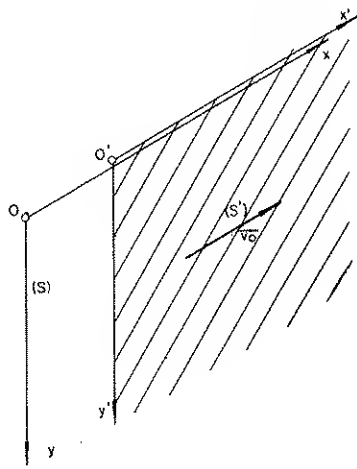



Figura VIII-27

O eixo O'x' continua coincidindo com o eixo Ox.

O eixo O'y' é paralelo a Oy.

Bem, mas qual é o interêsse de mudar de referencial?

Você vai perceber logo ao responder às duas perguntas seguintes.

Primeira pergunta: qual é a aceleração do projétil em (S')?

Resposta: Sendo (S') um referencial em translação em (S), as acelerações compõem-se como as velocidade (Seção VIII-1-4). Ou seja: a aceleração do projétil em (S), aceleração essa que sabemos ser igual a $\vec{g}$, é a soma da aceleração $\vec{a}'$ da partícula em (S') e da aceleração do ponto coincidente.

Mas (S') está em translação uniforme em (S). Consequentemente a aceleração em (S) de qualquer ponto de (S') é sempre nula.

Segue-se que

$$\vec{g} = \vec{a}' + 0$$

ou ainda: $$\vec{a}' = \vec{g}.$$

No referencial (S') a aceleração do projétil é a mesma que no referencial terrestre (S).

É a aceleração $\vec{g}$ da gravidade.

Segunda pergunta: Qual é, em t = 0, a velocidade do projétil em (S')?

Eu escrevo logo a equação de composição:

$$\{\text{vel. em (S)}\}_{t=0} = \{\text{vel. em (S')}\}_{t=0} + \{\text{vel. pto. coinc.}\}_{t=0}$$

$$\vec{v_o} = \vec{v}' + \vec{v_o} \qquad \text{(VIII-14)}$$

O que mostra que, <u>no instante inicial, a velocidade do projétil em (S') é nula</u>.

Você entendeu bem a maneira de se chegar à equação (VIII-14), sim?

Em resumo: para um observador em (S'), o movimento do projétil é o mais simples de todos os movimentos de projéteis.

É o movimento de queda livre sem velocidade inicial!

Você entende agora a razão da mudança de referencial?

O que acabamos de fazer é generalizar o que descobrimos na seção V-4-4 do Capítulo V.

Naquela oportunidade tratava-se do movi nto de um projétil lançado <u>verticalmente</u>.

Tínhamos chegado à conclusão que para um observador que tivesse no instante inicial a velocidade do projétil <u>e que conservasse essa velocidade</u>

depois, o movimento do projétil era um movimento de queda livre sem velocidade inicial.

Pois bem, isto é válido qualquer que seja a direção de lançamento.

Uma primeira consequência é que o projétil se encontra sempre debaixo dos pés do observador em (S'). (Fig. VIII-28).

Caindo... caindo...

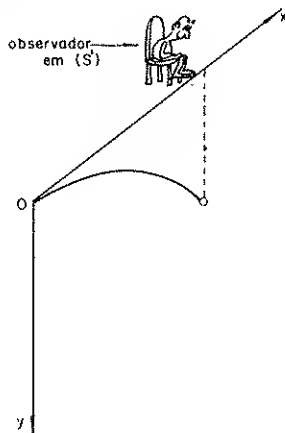



Figura VIII-28

Mas sempre debaixo dos pés.

Você nunca viu, no Cinema, bombas sendo sôltas de um avião em vôo e sendo filmadas, durante a queda, por uma câmera situada dentro do próprio compartimento de bombas do avião?

As bombas vão caindo...caindo...

Mas sempre na vertical da câmera. (Eu não posso decentemente falar dos pés da câmera...).

O bombardeiro materializa o referencial (S'), supondo-se evidentemente que êle conserva depois de largar as bombas a mesma velocidade que êle tinha antes.

E a câmera é o observador de (S').

Voltemos agora ao problema do vetor de posição.

A Fig. VIII-28 é a réplica da Fig. VIII-15, que nos mostrou como se resolve o problema no caso geral.

Só que agora estamos aplicando nossos conhecimentos ao caso particular do projétil.

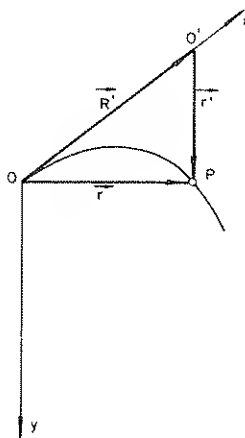



Figura VIII-28

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,' \qquad \text{(VIII-15)}$$

Mas $\vec{R} = \vec{v_o}\,t$, já que a translação de (S') em (S) é uniforme com velocidade $\vec{v_o}$.

E $\vec{r}\,' = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2$, já que em (S') o movimento é de queda livre com aceleração $\vec{g}$ e sem velocidade inicial.

A equação (VIII-15) passa a escrever-se:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v_o}\,t + \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2} \qquad \text{(VIII-16)}$$

É a expressão (VII-6) do Capítulo VI.

Martins tinha previsto que ela seria válida em todos os movimentos com aceleração constante.

Quais são as componentes de $\vec{r}$ em (S)?

Ao olhar a Fig. VIII-28 você observa com facilidade que a componente - x de $\vec{r}$ é idêntica à componente - x de $\vec{R}$.

É pois $\underline{v_o t}$.

E por sua vez a componente - y de $\vec{r}$ é idêntica à componente - y de $\vec{r}'$. E pela escôlha dos eixos em (S) e (S') a componente - y de $\vec{r}'$ é igual à sua componente - y'.

Ela vale $\frac{1}{2} gt^2$.

Temos finalmente:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_o t \\ \\ \frac{1}{2} gt^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII-17)}$$

VIII-2-5 <u>Equação da trajetória nos eixos naturais</u>.

A trajetória do projétil nos eixos naturais obtem-se da mesma maneira que se os eixos fôssem ortogonais.

Trata-se de obter uma relação entre a abscissa $x = v_o t$ e a ordenada $y = \frac{1}{2} gt^2$ que independa do tempo.

Em outros têrmos, temos que <u>eliminar</u> o tempo entre as duas equações do sistema

$$\begin{aligned} x &= v_o t \\ y &= \frac{1}{2} gt^2 \end{aligned} \qquad \text{(VIII-18)}$$

Eleve ao quadrado os dois membros da primeira equação e reescreva o sistema sob a forma

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} gt^2 \\ x^2 &= v_o^2\, t^2 \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro você obtém

$$\frac{y}{x^2} = \frac{g}{2v_o^2} \rightarrow \boxed{y = \frac{g}{2v_o^2}\, x^2} \qquad \text{(VIII-19)}$$

É a equação da trajetória do projétil nos eixos naturais.

A curva representada pela equação (VIII-19) é uma parábola de eixo vertical.

No Problema VIII-27 você aprenderá a determinar a equação da trajetória em eixos ortogonais.

VIII-2-6 <u>Determinação da velocidade em um ponto qualquer da trajetória.</u>

Suponha que eu queira determinar a velocidade do projétil na posição P da trajetória (Fig. VIII-28).

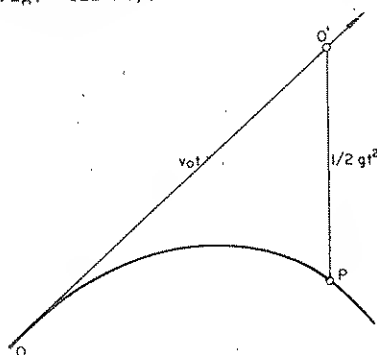



Figura VIII-28

Quando o projétil está em P, a origem de (S') está em O', e

$$OO' = v_o t \qquad \text{(VIII-20)}$$

$$O'P = \frac{1}{2}\, gt^2$$

Muito bem. <u>Se</u> eu conhecesse o tempo <u>t</u> que o projétil leva para chegar até P, eu poderia determinar a velocidade em P da maneira seguinte (Figura (VIII-29):

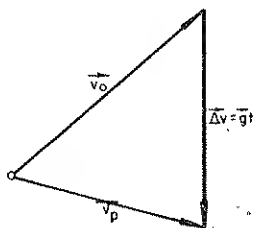



Figura VIII-29

O que faz variar a velocidade do projétil é a aceleração $\vec{g}$. Representemos por $\vec{\Delta v}$ a variação da velocidade entre o lançamento e a paaaagem por P. No intervalo de tempo <u>t</u> a aceleração <u>constante</u> $\vec{g}$ produziu a variação $\vec{\Delta v}$.

Pela própria definição da aceleração temos então

$$\frac{\vec{\Delta v}}{t} = \vec{g} \qquad \text{(VIII-21)}$$

E isso mostra que $\vec{\Delta v}$ e $\vec{g}$ <u>têm a mesma direção e o mesmo sentido</u>.

O segmento orientado que representa $\vec{\Delta v}$ é vertical e dirigido para baixo.

E o seu comprimento é proporcional a gt.

Voltemos então ao triângulo da Fig. VIII-29, formado pelos segmentos que representam respectivamente $\vec{v_o}$, $\vec{v_p}$ e $\vec{\Delta v} = \vec{g}t$.

Se eu multiplicar os comprimentos dos três lados dêsse triângulo por um mesmo número, eu obterei evidentemente um triângulo semelhante.

Eu escôlho como fator de multiplicação o valor numérico do tempo <u>t</u> que leva o projétil para alcançar a posição P.

E o triângulo da Fig. VIII-29 se transforma como indicado na Figura VIII-30.

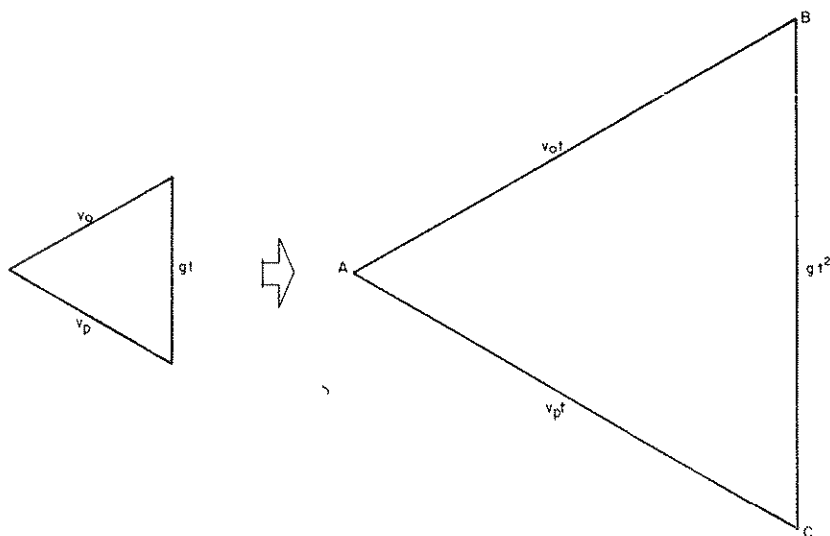



Figura VIII-30

Mas acontece agora algo muito interessante.

Voltemos juntos à Fig. VIII-28, e prolonguemos O'P até o ponto M tal que $PM = O'P = \frac{1}{2}gt^2$.

Obtemos assim o triângulo OO'M da Fig. VIII-31.

E êsse triângulo é idêntico ao triângulo ABC da Fig. VIII-30 pois os lados OO' e O'M são respectivamente iguais aos lados AB e BC; e os ângulos $\hat{O}'$ e $\hat{B}$ são iguais porque tanto um como o outro representam o suplemento do ângulo da velocidade inicial $\vec{v}_o$ com a aceleração $\vec{g}$.

Figura VIII-31

E de tudo isto resulta o seguinte: a direção do lado OM, que é também a direção do lado AC do triângulo ABC da Fig. VIII-30 <u>é a direção da velocidade do projétil em P</u>.

E consequentemente a direção da tangente em P à trajetória.

Ora se de P, meio do lado O'M do triângulo OO'M, você tira a paralela ao lado OM, construindo assim a tangente em P à trajetória, você encontra o lado OO' no seu ponto meio Q.

Você sabe agora achar a direção das velocidades em um ponto qualquer P da trajetória: é só unir o ponto P ao meio Q do segmento OO'.

A Fig. VIII-32 mostra a construção em três casos: 1) o ponto P está acima do plano horizontal que passa por O; 2) o ponto P está no plano horizontal que passa por O; 3) o ponto P está abaixo do plano horizontal que passa por O.

Figura VIII-32

Quanto ao módulo da velocidade, você o terá agora sem dificuldade.

Você construirá os segmentos orientados que representam respectivamente $\vec{v_0}$ e $\vec{g}$ (Fig. VIII-33).

Pela origem de $\vec{v_0}$ você construirá uma [illegible]a (D) cuja direção é aquela que você acabou de achar: a da velocidade em P.

E, lembrando-ae que a variação $\overrightarrow{\Delta v}$ da velocidade entre o inatante i-nicial e o instante t deve aer paralela a $\vec{g}$, você conatruirá, pela extremida-de de $\overrightarrow{v_o}$, a paralela a $\vec{g}$.

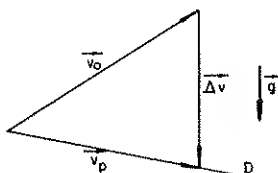



Figura VIII-33

Sua interaeção com a reta (D) determina $\overrightarrow{v_p}$.

Falta aòmente medir o comprimento do aegmento correapondente, multi-plicá-lo pelo fator de escala que você eacolheu, e terá finalmente $|\overrightarrow{v_p}|$.

VIII-2-7 <u>Alcance do projétil</u>.

No plano vertical que vai conter a trajetória do projétil, eu deter-mino uma reta OΔ pelo ângulo θ que ela faz com a vertical. (Fig. VIII-34)

Eu lanço o projétil com velocidade $\overrightarrow{v_o}$ numa direção fazendo o ângulo α acima da reta OΔ.

Chamarei α de <u>ângulo de tiro</u>.

A trajetória que ae inicia em O corta de novo a reta OΔ em A.

A distância OA é chamada alcance do projétil na direção OΔ. (*)

(*) É bom que você eateja aviaado do aeguinte: todoa oa livroa texto que eu co-nheço até agora chamam ângulo de tiro ao ângulo de $\overrightarrow{v_o}$ com a <u>horizontal</u>. O alcance é a diatância OA da Fig. VIII-34 quando OΔ é horizontal. Como eu não vejo nenhuma razão para conaiderar a horizontal como uma direção privilegia-da, eu julguei bom dar a êaaea parâmetroa uma definição maia geral. No entan-to, tome cuidado ao ler outroa textoa para não fazer confuaão.

Representaremos êsse alcance pelo símbolo $\underline{d_\theta}$.

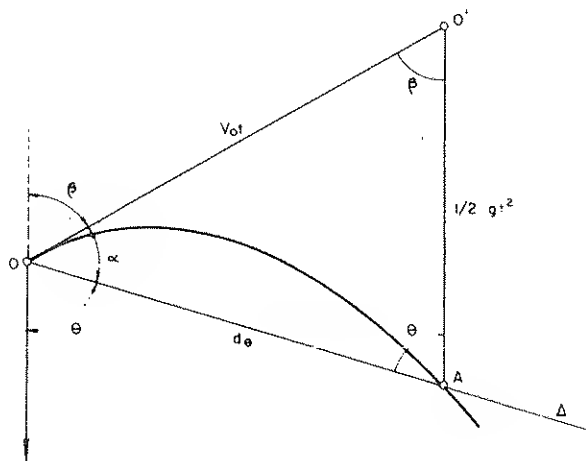



Figura VIII-34

Observe que $\theta + \alpha + \beta = \pi$.

O cálculo de d_θ não oferece dificuldade desde que você se lembre de um teorema clássico de trigonometria que diz o seguinte: "em um triângulo qualquer existe uma razão constante entre qualquer um dos três lados e o seno do ângulo oposto".

Na Figura VIII-34 os comprimentos dos três lados são assinalados, assim como os valores dos ângulos. $\underline{t}$ representa sempre o tempo que leva o projétil para ir de O até A.

Escrevemos:

$$\frac{d_\theta}{\text{sen } \beta} = \frac{v_o t}{\text{sen } \theta} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\text{sen } \alpha} \qquad \text{(VIII-22)}$$

Duas equações com duas incógnitas: $\underline{t}$ e $\underline{d_\theta}$.

A última equação fornece logo $\underline{t}$:

$$\boxed{t = \frac{2\, v_o \text{ sen } \alpha}{g \text{ sen } \theta}\,,} \qquad \text{(VIII-23)}$$

e substituindo na primeira:

$$\boxed{d_\theta = \frac{2\, v_o^2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta}{g \text{ sen}^2\ \theta}} \qquad \text{(VIII-23)}$$

Se por acaso você quiser o alcance na direção horizontal ($\theta = \frac{\pi}{2}$) você observará que $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ são então complementares, sendo sen β = cos α, e você terá

$$d_{\pi/2} = \frac{2\, v_o^2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha}{g}$$

Você sabe também que 2 sen α cos α = sen 2α de modo que

$$\boxed{d_{\pi/2} = \frac{v_o^2 \text{ sen } 2\alpha}{g}} \qquad \text{(VIII-25)}$$

VIII-2-8 Divagações em tôrno do alcance.

Suponha que você atira uma pedra verticalmente para cima.

Qual é o alcance na direção OA?

Zero!

Suponha agora que você atira a pedra na própria direção OA.

Qual é o alcance nessa direção?

Outra vez zero!

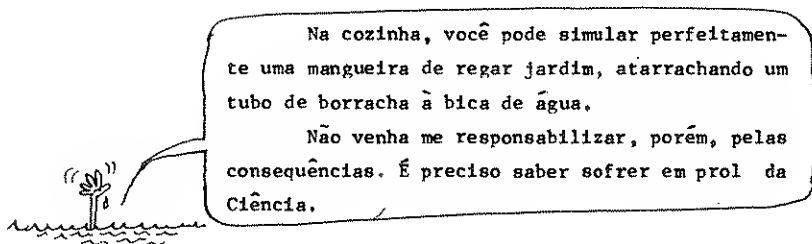
De modo que, fazendo variar o ângulo de tiro $\underline{\alpha}$ de zero até $(\pi - \theta)$, o alcance começa e termina com o mesmo valor: zero.

Òbviamente, êsse alcance deve passar por um valor máximo, nessa faixa de ângulos de tiro.

Por um só valor máximo?

Acho que sim. Afinal das contas, porque é que você não tenta fazer a experiência se você dispõe de uma mangueira de regar jardim?

Na cozinha, você pode simular perfeitamente uma mangueira de regar jardim, atarrachando um tubo de borracha à bica de água.

Não venha me responsabilizar, porém, pelas consequências. É preciso saber sofrer em prol da Ciência.

De maneira que, guiados pela nossa intuição física e pela experiência, aceitaremos sem mais discussão que ao fazer variar o ângulo de tiro de zero até $(\pi - \theta)$ o alcance na direção $O\Delta$ passa por <u>um</u> máximo.

Para que valor de $\underline{\alpha}$ o alcance $\underline{d_\theta}$ atinge o seu valor máximo?

Escrevo de novo a expressão de $\underline{d_\theta}$:

$$d_\theta = \frac{2\, v_o^2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta}{g \text{ sen}^2 \theta} \qquad \text{(VIII-26)}$$

Sendo constantes as grandezas v_o $\underline{g}$ e $\underline{\theta}$, o alcance $\underline{d_\theta}$ passa pelo seu valor máximo ao mesmo tempo que o produto

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \qquad \text{(VIII-27)}$$

E devemos procurar como e quando êsse produto se torna máximo.

Vejamos como podemos resolver isto.

Observe a Figura VIII-35.

Ela representa duas trajetórias que têm em comum a mesma direção $O\Delta$: o ângulo θ é o mesmo nas duas.

As velocidades iniciais têm também o mesmo módulo.

Dessa maneira, o coeficiente $2v_o^2/g \text{ sen}^2 \theta$ (o que multiplica o produto sen α sen β na expressão de d_θ) é o mesmo nos dois casos:

A trajetória (1) foi obtida com um ângulo de tiro $\underline{\alpha_1}$. A êsse ângulo

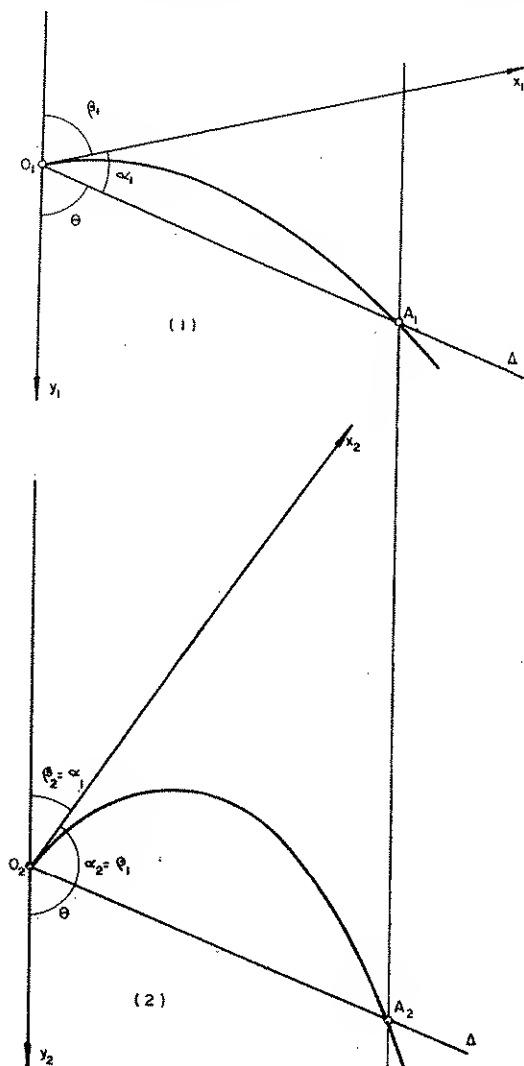



Figura VIII-35

α_1 corresponde o ângulo β_1.

A trajetória (2) foi obtida com um ângulo de tiro α_2 igual ao ângulo β_1 da trajetória (1).

E naturalmente $\beta_2 = \alpha_1$.

Segue-se que os dois alcances são iguais!

Ora (Fig. VIII-36) se eu representar na mesma figura as duas direções de tiro, essas direções são simétricas em relação à bissetriz OB do ângulo formado por OΔ e pelo prolongamento Oy, de Oy.

Isso é simplesmente devido ao fato que $\alpha_2 = \beta_1$, e que as somas $(\alpha_1 + \beta_1)$ e $(\alpha_2 + \beta_2)$ têm o mesmo valor.

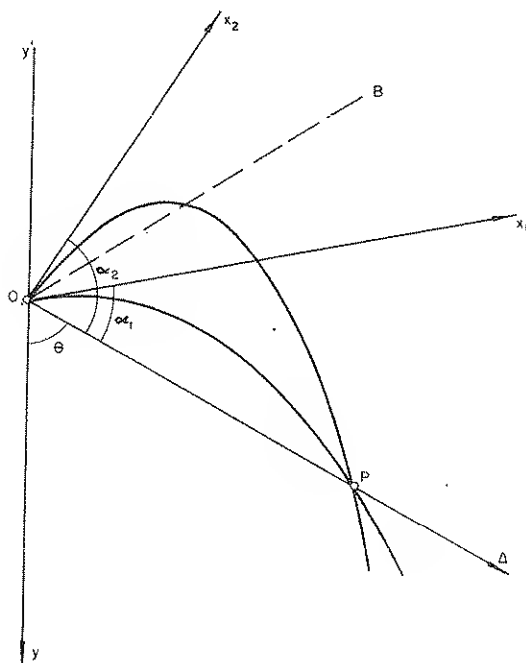



Figura VIII-36

Bem, então se as direções de tiro fôrem simétricas em relação à bissetriz do ângulo (OΔ, Oy'), os alcances são iguais.

Mas veja qual é a consequência disto: sabemos que, ao crescer o ângulo de tiro de zero até $(\pi - \theta)$, o alcance passa por <u>um</u> e <u>um só</u> máximo.

Acho que você já concluiu que êsses máximo acontece quando a direção de tiro <u>coincide com a bissetriz OB</u>. (Fig. VIII-37).

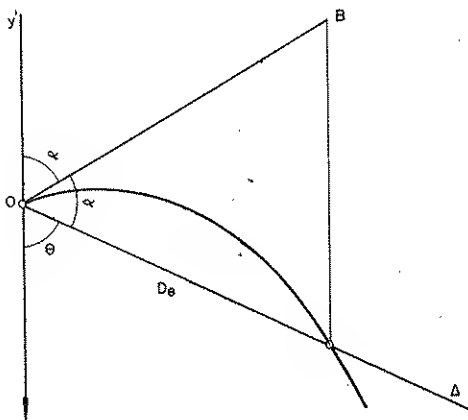



Figura VIII-37

Não é mesmo?

Pois raciocine pelo absurdo: se o máximo se desse antes da direção de tiro alcançar a bissetriz OB, êle voltaria a dar-se para a posição simétrica em relação a OB.

E então teríamos <u>dois</u> máximos...

E quanto vale o valor máximo D_θ do alcance na direção OΔ?

Nêsse caso, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}(\pi - \theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

Segue-se que:

$$\text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

e que

$$D_\theta = \frac{2\ v_o^2\ \cos^2\frac{\theta}{2}}{g\ \text{sen}^2\theta}$$

Mas, sendo $\text{sen}\ \theta = 2\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}\ \cos\ \frac{\theta}{2}$, segue-se que

$$\text{sen}^2\theta = 4\ \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\ \cos^2\frac{\theta}{2},$$

de modo que na expressão acima de D_θ você pode simplificar por $2\ \cos^2\frac{\theta}{2}$ para obter finalmente

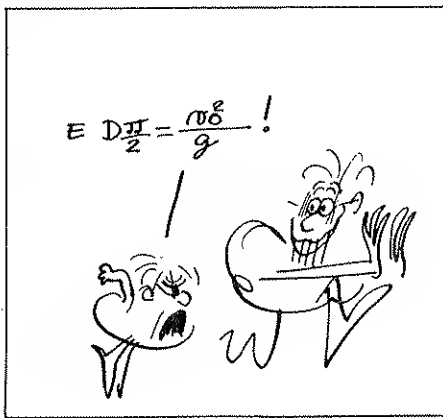
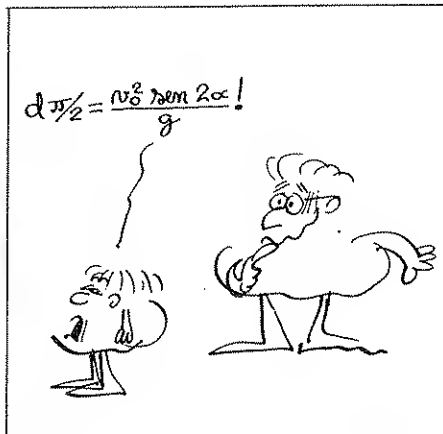
$$\boxed{D_\theta = \frac{v_o^2}{2\ g\ \text{sen}^2\frac{\theta}{2}}} \qquad \text{(VIII-28)}$$

Vamos ao caso particular em que você quer calcular o alcance máximo sôbre terreno horizontal:

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4},\quad \text{e}\quad 2\ \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$$

de modo que

$$\boxed{D_{\pi/2} = \frac{v_o^2}{g}} \qquad \text{(VIII-29)}$$

MARTINS E EU

VIII-2-9 **Flecha da trajetória.**

Chama-se flecha da trajetória à maior distância **vertical** entre o projétil e a reta OA.

Na Figura VIII-38, Q é o meio de OO'.

Se o observador (S') chega em O' no instante $\underline{t}$, êle passa por Q no instante $\frac{t}{2}$. Nêsse instante o projétil está em R na vertical de Q, e $QR = \frac{1}{4}\ O'A$.

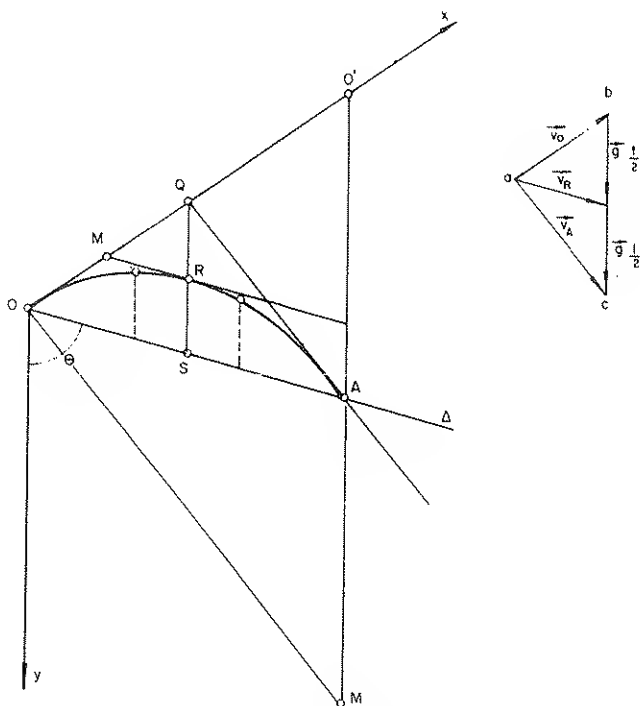



Figura VIII-38

Você entende por quê?

Como?

Certo: é porque aa distânciaa <u>verticais</u> são proporcionaia aos <u>quadradoa</u> doa tempos.

Se o tempo que leva o obaervador (S') para chegar até Q é a metade do tempo, que êle leva para chegar até O'...

(Vamos lá! Conclua!)

Eu quero lhe mostrar que a flecha da trajetória OA é f_θ = RS.

Observe: sendo QS vertical e Q meio de OO', S é meio de OA e QS = $= \frac{1}{2}$ O'A.

E se QR $= \frac{1}{4}$ O'A, então R é meio de QS.

E a flecha procurada f_θ será igual a QR ou seja, a $\frac{1}{4}$ O'A ou ainda a $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{8} gt^2$.

Para mostrar que a flecha é RS basta mostrar que a tangente em R à trajetória é paralela a OA, pois se isto fôr o caso qualquer ponto da trajetória que não seja o ponto R distará <u>verticalmente</u> de OA de uma distância menor que RS.

Na Fig. VIII-38 você pode observar dois dêsses pontos, cujas distâncias verticais à reta OA estão representadas em tracejado.

Mas onde é mesmo que eu estava?...

Ah sim! Eu queria mostrar que a tangente em R à trajetória é paralela a OA.

Vou provar isto mostrando que o segmento orientado que representa a velocidade do projétil em R tem a direção de OA.

Na mesma Figura VIII-38 você tem a construção de $\overrightarrow{v_R}$ a partir de $\overrightarrow{v_o}$.

Baata deixar agir $\vec{g}$ durante $\frac{t}{2}$.

Mais $\frac{t}{2}$ e teríamos $\overrightarrow{v_A}$, você ae lembra?

Pois bem, já vimos na seção VIII-2-6 que o triângulo abc formado pelos segmentos $\vec{v}_o$ e $\vec{v}_A$ é homotético do triângulo OO'M.

Então duas medianas correspondentes têm a mesma direção.

O segmento $\vec{v}_R$ é mediana do triângulo abc. E a mediana correspondente do triângulo OO'M é OA.

E assim é que $\vec{v}_R$ tem a direção de OA.

E que a flecha é efetivamente RS.

Quanto vale essa flecha?

A expressão (VIII-23) fornece $t = \frac{2 v_o \text{ sen } \alpha}{g \text{ sen } \theta}$.

De modo que

$$f_\theta = \frac{1}{8} g \left(\frac{2 v_o \text{ sen } \alpha}{g \text{ sen } \theta}\right)^2$$

$$\boxed{f_\theta = \frac{v_o^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2g \text{ sen}^2 \theta}} \qquad \text{(VIII-30)}$$

No caso particular em que você deseja calcular a flecha acima de um plano horizontal $(\theta = \frac{\pi}{2})$, obterá logo

$$\boxed{f_{\pi/2} = \frac{v_o^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2g}} \qquad \text{(VIII-31)}$$

PROBLEMAS PROPOSTOS

(Os problemas estrelados (*) devem ser discutidos em aula, com o seu Professor).

VIII-1 Um automóvel anda numa estrada retilínea horizontal.

O referencial - automóvel está em translação no referencial terrestre?

VIII-2 Um automóvel descreve sem derrapar uma curva da estrada.

O referencial - automóvel está em translação no referencial terrestre?

E se o automóvel derrapasse?

VIII-3 Observe um dos ponteiros do seu relógio. Qual é o movimento do referencial - ponteiro no referencial - relógio?

VIII-4 Considere um sistema de eixos coordenados cuja origem coincide com o centro da Terra e cujos eixos têm direções fixas em relação às estrêlas. Represente por (S) o referencial definido por êsses eixos.

Qual é o movimento em (S) do referencial Terra?

Qual é o movimento em (S) do referencial Lua? (Lembre-se que a Lua apresenta sempre o mesmo hemisfério para a Terra).

VIII-5 Qual é o movimento, no referencial terrestre, de um carrinho de montanha russa?

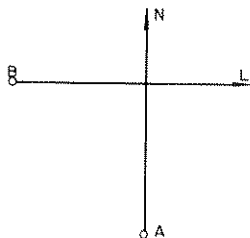
VIII-6 Enquanto você está escrevendo com sua lapiseira no seu caderno, qual é o movimento do referencial - lapiseira no referencial terrestre?

VIII-7 Você conhece o bondinho do Pão de Açucar, no Rio de Janeiro?

Qual é o movimento do referencial do bondinho no referencial terrestre?

VIII-8 Um navio A faz rota para Norte com velocidade constante. Um outro navio B faz rota para Leste, também com velocidade constante.

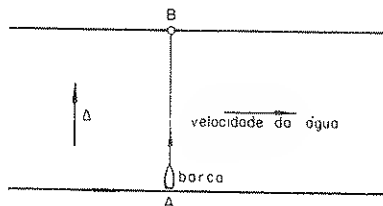
Qual é a trajetória do navio B vista pelo navio A?

Naturalmente, como eu não fixei os valores das velocidades, você terá que se contentar com uma solução geral. Raciocine pelo método "oito ou oitenta".

VIII-9 Resolva agora o problema precedente supondo que o navio A faz 40km/h, e o navio B, 20km/h.

VIII-10 E se os navios do problema VIII-8 tivessem velocidades iguais?

Rápido! Você tem 20 segundos para responder!

*VIII-11 Você conhece o problema do barco que quer atravessar o rio? Não? Então vamos lá!

As águas de um rio correm com velocidade uniforme de 8,0km/h.

Você tem um barco em A e quer atravessar o rio.

Na primeira tentativa, você mantém a prôa do barco sempre perpendicular àa beiras do rio. Isto significa que no referencial (S') da água o seu barco terá uma velocidade cuja direção será a direção Δ da figura.

Em relação à água - isto é, em (S') -, a velocidade do barco é 6,0 km/h.

Faça um deaenho em escala e marca o ponto em que você atingirá a beira oposta.

Quanto tempo levará para atravessar? (Decida você mesmo qual é a largura do rio).

*VIII-12 Fiquemos ainda no problema do barco e do rio. Suponha que você quer atraveasar perpendicularmente àa beiras, ao longo da trajetória AB.

Isto é possível?

Ou terá que mudar o motor do seu barco?

*VIII-13 E continuemos a brincar de barquinho...

Você não quer mudar o motor do barco.

Me diga a que distância mínima do ponto B você poderá atingir a beira oposta, quando tempo levará, e em que direção você terá que apontar a prôa do barco.

Lembre-se que você fixou a largura do rio.

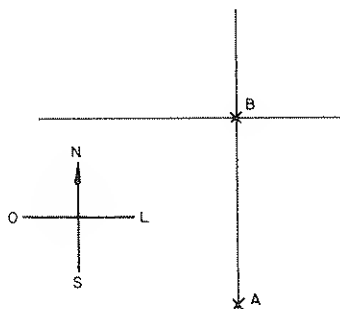
*VIII-14 Êste é um problema um pouco mais difícil... ou talvez não seja. Vamos tentar!

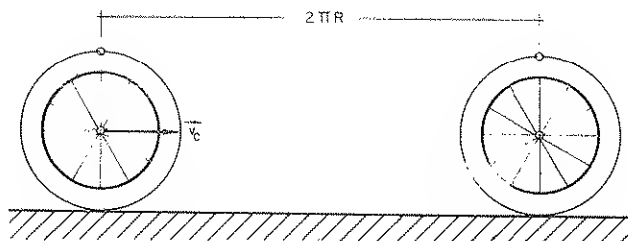
Um submarino A em missão de patrulha aviata um destroier suspeito B em pleno Norte dêle.

O destroier faz rota para Oeate com velocidade constante.

O submarino quer aproximar-se o mais posaível do destroier para identificá-lo. Acontece porém que a velocidade máxima do submarino é metade da do destroier.

Qual é o rumo que deverá tomar o submarino?

|Sugestão: tome o referencial do submarino como referencial (S), e o mar como referencial (S')|.

*VIII-15 <u>O que é rolar sem deslizar?</u>

Quando uma roda de bicicleta, ou de automóvel, rola sôbre um terreno plano, ela geralmente rola sem deslizar. Isto significa que depois de dar uma volta completa em movimento circular uniforme <u>no referencial da bicicleta ou do carro</u>, a roda "em bloco" terá avançado de $2\pi R$ <u>no referencial terrestre</u>. ($R \equiv$ raio da roda).

Observe atentamente a figura e tente entender bem o que eu expliquei.

Mas o melhor ainda é você arranjar uma roda e fazê-la rolar sem deslizar. (Um prato serve...).

Nessas condições a velocidade $\vec{v}_c$ do eixo, no referencial terrestre, é tal que $v_c T = 2\pi R$, em que T representa o período de rotação.

E já aprendemos que sendo $\underline{\omega}$ a velocidade angular da roda, $T = 2\pi/\omega$.

Qual é então o valor de v_c, em função de $\underline{\omega}$ e $\underline{R}$?

Êsse resultado não lhe lembra nada?

*VIII-16 Êsse problema continua o anterior.

Chamemos (S) o referencial terrestre e (S') o referencial prêso ao eixo da roda e em translação em (S).

Qual é a velocidade vetorial, em (S), do ponto mais alto da roda?

Qual é a velocidade em (S) do ponto de contato com o solo?

A resposta a essa última pergunta é geralmente utilizada para caracterizar o rolamento sem deslizamento.

*VIII-17 Considere de novo uma roda de raio R que rola sem deslizar sôbre um plano horizontal. Seja $\underline{\omega}$ a velocidade angular da roda.

No problema anterior você determinou a velocidade em (S) de dois pontos particulares da roda.

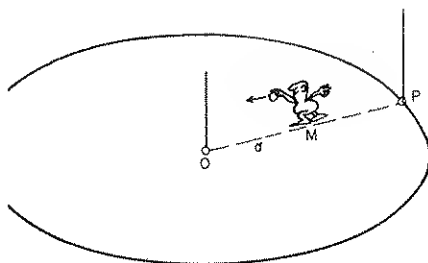
Determine agora o vetor velocidade em (S) de um ponto qualquer da circunferência da roda.

E mais um pouco de coragem...

Pelo que você acaba de achar, mostre que em (S) e no instante qualquer $\underline{t}$, tudo se passa <u>como se</u> a roda girasse <u>instantâneamente</u> com velocidade angular $\underline{\omega}$ em tôrno do seu ponto de contato com o solo.

*VIII-18 Uma plataforma horizontal de raio R está girando com velocidade angular uniforme $\underline{\omega}$.

O Martins está em pé na plataforma, à uma distância $\underline{a}$ do centro e quer atirar (horizontalmente) uma pedra para atingir um poste plantado em O

no centro da plataforma.

Escôlha você mesmo valores numéricos para ω R a e para a velocidade $\vec{v}'$ com que Martins vai atirar a Pedra.

Feito isto, determine (gràficamente ou por qualquer outro meio lícito) a direção do lançamento no referencial da plataforma.

A trajetória da pedra vista pelo Martins é uma reta? Não estou me referindo ao "efeito projétil". Você poderá supor que, depois de largada, a pedra tem no referencial terrestre um movimento retilíneo uniforme com velocidade de $\vec{v}'$.

Se não fôr uma reta você pode me dizer qual é a forma aproximada da trajetória?

*VIII-19 Suponha agora que o Martins está no centro da plataforma. Êle quer atingir o poste plantado em um ponto P da circunferência.

Qual é a direção de lançamento no referencial da plataforma?

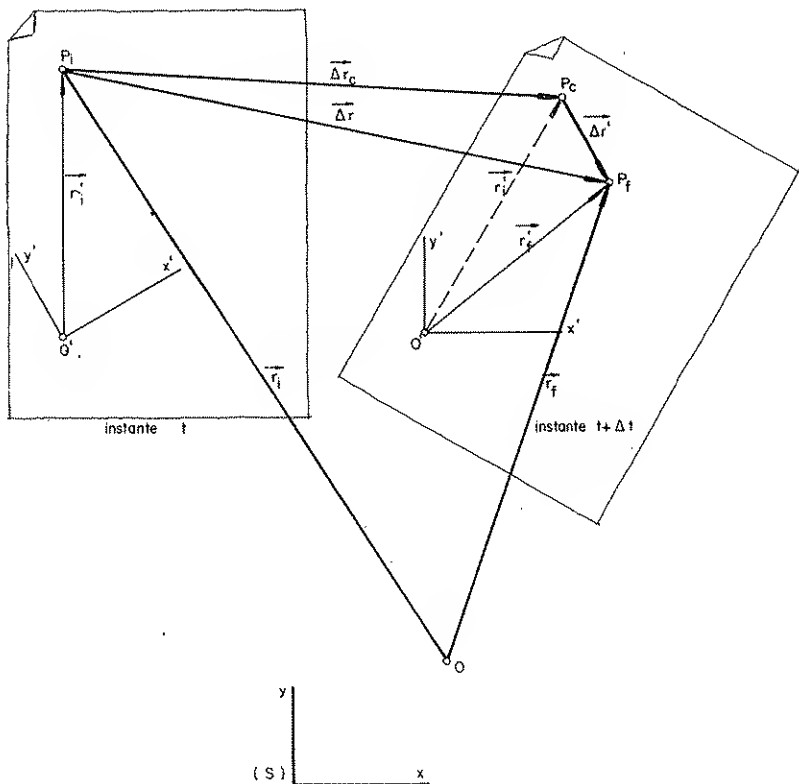
Lembre-se que você mesmo deve fixar os valores numéricos dos parâmetros do problema.

Construa gràficamente a tangente a trajetória vista pelo Martins.

a) no instante do lançamento.

b) no instante em que a pedra bate no poste.

VIII-20 Eu ía esquecendo que eu prometi ao Martins a demonstração "rigorosa" da regra da composição de velocidades expressa em (VIII-6):

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \overrightarrow{v_c}$$

Não se assuste com a figura precedente! Vamos por partes.

Há o referencial (S), com a origem O. Você pode imaginar que (S) é a página do livro.

(S') é uma fôlha de papel transparente, com os seus eixos e sua origem O'.

(S') desliza sôbre (S). O movimento é qualquer.

Representei duas posições de (S'). A primeira, no instante <u>t</u>. A outra, no instante <u>t + Δt</u>.

Uma partícula, no instante <u>t</u>, está na posição P_i. Seu vetor de posição em (S) é $\vec{r_i}$. Em (S') é $\vec{r}'_i$. (o índice <u>i</u> significa: inicial).

No instante <u>t + Δt</u> a partícula está na posição P_f. Seu vetor de posição em (S) é $\vec{r}_f$. Em (S') é $\vec{r}'_f$. (<u>f</u> para "final" claro).

Você vê que em (S), o vetor de posição variou de $\overrightarrow{\Delta r}$.

Para saber o que aconteceu em (S'), alguém tem que se lembrar, no instante <u>t + Δt</u>, da posição que "a partícula ocupava no instante <u>t</u>".

Eis porque eu deixei desenhado, na fôlha transparente, o segmento orientado que representa $\vec{r}'_i$.

É o segmento tracejado da posição final da fôlha.

Há dois segmentos $\vec{r}'_i$ na Figura.

Por quê é que êsses dois vetores não são paralelos?

Bem, mas isso mostra que o vetor de posição em (S') variou de $\overrightarrow{\Delta r}'$.

E que a posição do ponto coincidente variou em (S) de $\overrightarrow{\Delta r_c}$.

E temos: $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_c} + \overrightarrow{\Delta r}'$.

Eu acho que agora você pode terminar o caminho com suas próprias pernas.

VIII-21 Um avião vôa rumo ao Norte com velocidade horizontal constante de 800 km/h.

Outro avião vôa rumo a Sudoeste, no mesmo plano horizontal que o primeiro, com velocidade constante de 600km/h.

Qual é a velocidade relativa do primeiro avião em relação ao segundo?

*VIII-22 Faça a seguinte experiência: coloque duas caixas de fósforos uma em cima da outra e deixe cair o conjunto. O que é que você observa?

Qual é a aceleração de uma qualquer das caixas no referencial da outra, durante a queda? (Volte também ao diálogo com Martins na seção V-3-2 do Capítulo V).

*VIII-23 Você sabe (ou não fêz o problema precedente?) que todos os corpos caem com a mesma aceleração. (Isto não é <u>rigorosamente</u> verdadeiro, mas deixe para lá!).

Suponha então que você está em um elevador em queda livre. É só para fazer de conta, claro! Já imaginou?...

Você tem uma caixa de fósforos na mão.

Abra a mão! O que acontece?

*VIII-24 Volte ao problema da roda que rola sem deslizar (Problemas VIII -15, VIII-16 e VIII-17).

Considere um ponto P qualquer da circunferência.

Qual é a aceleração de P em (S)?

Quais são os pontos da roda que têm em (S), em determinado instante, um movimento acelerado?

Quais são os pontos que têm um movimento retardado?

*VIII-25 A Fig. 1 representa as posições sucessivas de uma partícula no referencial (S) da página, nos instantes zero, um, dois... seis.

Como você vê, a partícula está em (S) em movimento retilíneo uniforme.

O referencial (S') é um disco de papel transparente que você vai recortar agora mesmo.

Qualquer raio serve desde que seja maior que o <u>R</u> da Fig. 1.

Trace três diâmetros fazendo dois a dois ângulos de 60^{o}, como na Figura 2.

Com um alfinete, espete o disco, pelo seu centro, sôbre a posição (3) da partícula.

O jôgo é o seguinte: o disco (S') gira no sentido da seta. No ins-

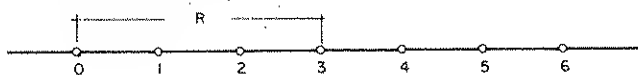



Figura I

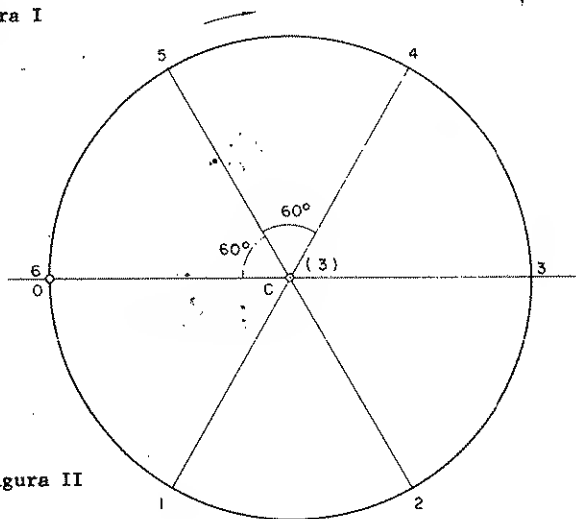



Figura II

tante zero, o diâmetro 0-3 coincide com a trajetória da partícula. Você marca então, sôbre o disco, a posição da partícula que está por baixo.

No instante 1, o diâmetro 1-4 vem coincidir com a trajetória. Marque de novo, sôbre o disco, a posição da partícula, que agora está em (1) na fôlha (S).

No instante 2, o diâmetro 2-5 vem coincidir com a trajetória...

Você está construindo, ponto por ponto, a trajetória da partícula no referencial do disco.

Obtidos os sete pontos (de 0 até 6) una-os por uma curva contínua para ter a trajetória.

Bonita, não é?

Mas por quê é mesmo que o mandei fazer tudo isto?

Ah! já sei!

O Martins e eu passamos meia-hora discutindo sôbre composição de acelerações no caso em que (S') não está em translação em (S).

Eu quero lhe mostrar isto de perto.

Considere um ponto qualquer da trajetória em (S') inclusive o centro do disco, ponto cuja velocidade em (S) é sempre nula.

Qual é a aceleração da partícula em (S)? Qual é a aceleração do ponto coincidente? Qual é (mais ou menos...) a aceleração da partícula em (S')?

O que é que você conclui?

*VIII-26 Procure se lembrar do valor do raio da Terra. Dois algarismos significativos chegam.

Já achou? Bem, agora vamos admitir algo que será discutido mais tarde, a saber que o módulo da aceleração da gravidade varia em razão inversa do quadrado da distância ao centro da Terra.

Você está estudando problemas de projéteis e para aplicar a teoria desenvolvida nêsse capítulo você deve admitir que a resistência do ar é desprezível, e que $\vec{g}$ é constante.

Deixe de lado por enquanto a história do ar, e procure a altura máxima a que deverá chegar o seu projétil para que a variação do módulo de $\vec{g}$ ao longo da trajetória não ultrapasse 1% do valor ao solo.

Assim por alto, qual seria a menor velocidade inicial que levaria o seu projétil à essa altura?

Em vista do que você acaba de encontrar, você acharia razoável desprezar a resistência do ar?

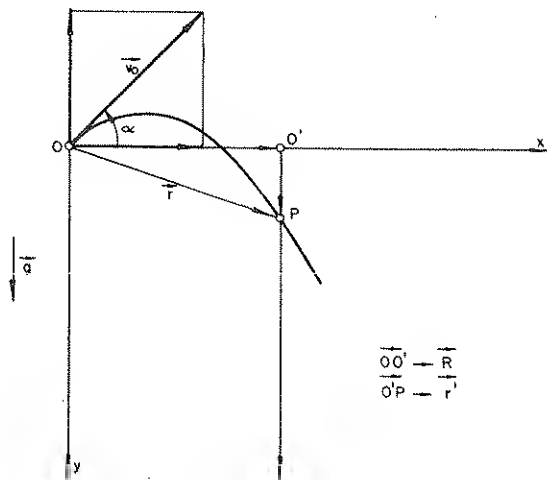
Das duas condições enunciadas - desprezar a resistência do ar e a variação de $\vec{g}$ - qual é a "principal"?

E você precisava fazer muitos cálculos para responder a essa última pergunta, ou poderia ter respondido imediatamente?

VIII-27 Nêste problema, vamos aprender a determinar a equação da trajetória de um projétil em eixos ortogonais.

A Figura abaixo mostra a orientação dos eixos e a velocidade inicial $\vec{v}_o$. O ângulo de tiro <u>medido agora a partir da horizontal</u> é α.

Na Figura α é negativo (tiro para cima) porque êle é de sentido con-

trário ao da rotação que leva Ox sôbre Oy. ...(Não adianta, Martins, você não me pega nessa não! Fale com seu Professor de Matemática, está bem?)...

Se o tiro fôsse para baixo, α seria positivo.

Considere agora como referencial (S') o referencial em translação em (S), cujos eixos são paralelos aos de (S) e cuja velocidade em (S) é a componente horizontal da velocidade inicial, ou seja $\vec{v}_o$ cos α.

Qual é o movimento do projétil em (S')? Mostre que em (S') a traje-

tória é o suporte do eixo O'y'.

Expresse, em função de $\vec{v}_o$, $\underline{\alpha}$, $\vec{g}$, $\underline{t}$, o vetor de posição $\vec{r}\,'$ do projétil em (S').

Seja $\vec{R}$ o vetor de posição em (S) da origem de (S'). Êle é representado na figura pelo segmento $\overrightarrow{OO'}$.

Expresse $\vec{R}$ em função de $\vec{v}_o$, $\underline{\alpha}$, $\underline{t}$.

Você agora deve ser capaz de escrever imediatamente as componentes de $\vec{r}\,'$ e $\vec{R}$ em função de $\underline{v_o}$ $\underline{\alpha}$ $\underline{g}$ $\underline{t}$.

E como $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$, você vai obter as componentes $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de $\vec{r}$ em função dos mesmos parâmetros.

Bastará finalmente que você elimine o tempo entre $\underline{x}$ e $\underline{y}$ para ter a equação da trajetória em coordenadas retangulares.

Mas não é mesmo muito mais complicado que em eixos naturais?...

VIII-28 Já que está em coordenadas retangulares aproveite para determinar o alcance e a flecha, e compare com as expressões (VIII-25) e (VIII-31) respectivamente.

*VIII-29 Pelo ponto de lançamento de um projétil, e no plano da trajetória, trace uma reta de direção qualquer (mas não vertical).

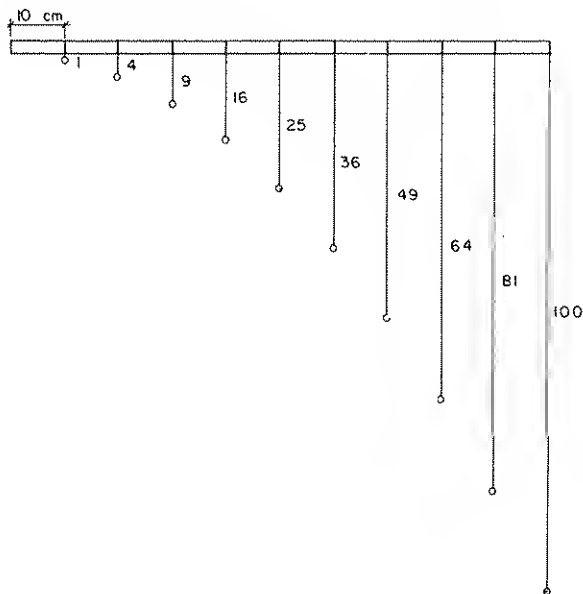
Mostre que a projeção vertical do projétil sôbre essa reta tem um movimento retilíneo uniforme.

Qual é a velocidade do movimento?

*VIII-30 Êste é um projeto para executar em casa. Procure uma vara de um a dois metros de comprimento (cabo de vassoura serve).

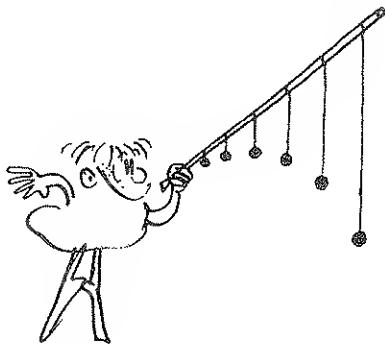
"Gradue" a vara de dez em dez centímetros a partir de uma extremidade.

Em cada uma das divisões assim obtidas, amarre, ou cole com fita durex, um fio na extremidade do qual você terá prêso um botão, ou uma chapinha de refrigerante.

Os comprimentos dêsses fios devem ser proporcionais aos quadrados

dos inteiros sucessivos.

A Figura acima mostra por exemplo fios de comprimentos iguais sucessivamente a 1cm, 4cm, 9cm... 100cm.

Você agora deve se convencer que, ao segurar a vara numa direção qualquer, os botões ou as chapinhas materiarização a trajetória de um projétil que você lançaria precisamente na direção da vara.

Aproveite então a oportunidade para me dizer o seguinte: depois de escolher você mesmo o espaçamento dos fios ao longo da vara (não precisa ser

dez centímetros), e o fator de proporcionalidade entre os comprimentos doa fios e a sucessão dos quadrados (não precisa ser 1 como na figura que eu fiz), qual é a velocidade inicial do projétil, no <u>seu</u> modêlo?

VIII-31 Procure uma fôlha de papel milimetrado ou pelo menos quadriculado.

Você vai construir ponto por ponto as trajetórias de dois projéteis lançado do mesmo ponto com a mesma velocidade (em módulo) de 30m/a aendo os ângulos de tiro respectivamente iguais a 30^o e 60^o <u>acima da horizontal</u>.

Basta conatruir as trajetórias correspondentes aos cinco segundos iniciais.

Se isso facilitar oa seus cálculos, tome $g = 10 m/s^2$.

*VIII-32 Caracterize a velocidade média de um projétil (velocidade vetorial claro) entre o instante do lançamento e o instante em que êle atinge uma posição qualquer sôbre a trajetória.

*VIII-33 Aprendemos no Capítulo V que no movimento uniformemente variado a velocidade escalar média em determinado intervalo de tempo é a média das velocidades no início e no final do intervalo.

Mostre que essa propriedade é geral para os movimentos com aceleração constante. Prove que sendo $\vec{v_i}$ e $\vec{v_f}$ a velocidade inicial e a velocidade final respectivamente, a velocidade média no intervalo é

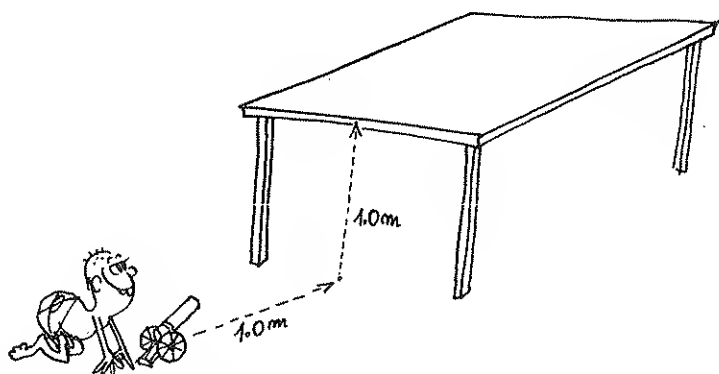
$$<\vec{v}> = \frac{1}{2} (\vec{v_i} + \vec{v_f})$$

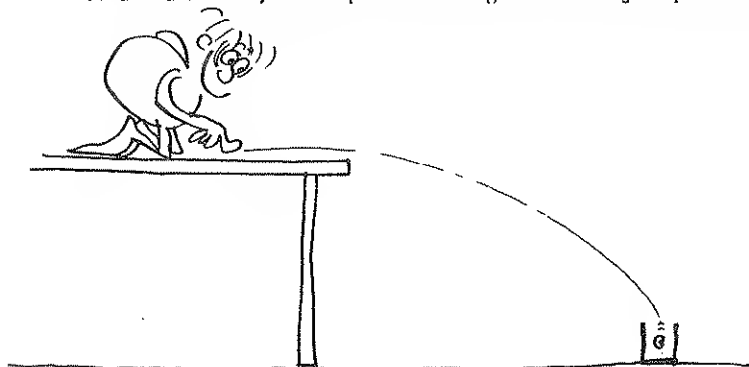
*VIII-34 Suponha que você esteja no plano da trajetória de um projétil (eu não disse <u>sôbre</u> a trajetória...). O que é que você está vendo ae você olha <u>horizontalmente</u>?

*VIII-35 Referindo-ae ao problema precedente, o que é que você estaria vendo se você olhasse <u>verticalmente</u>?

*VIII-36 O irmãozinho do Martins (o qual promete ser muito pior que o nosso querido colega) tem um canhão de brinquedo, de ângulo variável, e que atira bolas de gude com velocidade de 2,0m/s. Êle armou o canhão na frente de uma mesa, como mostra a Figura. (Veja as distâncias marcadas). Conseguirá o nosso herói colocar as bolas sôbre a mesa?

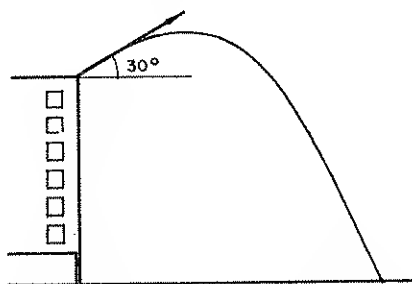
Atenção: responda primeiro sem fazer nenhum cálculo, usando sòmente a sua "intuição" física.

Depois então faça os cálculos...

*VIII-37 Faça a experiência seguinte: ponha uma lata pequena no chão, em frente a uma mesa e, dando petelecos a grãos de feijão que estão por ci-

ma da mesa, procure mandá-los para dentro da lata.

Faça tôdas as medidas que fôrem necessárias e diga qual é a velocidade que deve ter o grão de feijão ao deixar a mesa.

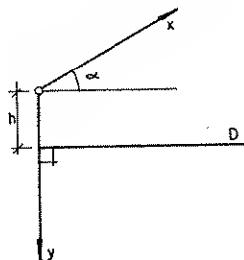
*VIII-38 Você atira uma pedra para cima, a 45° da horizontal. Quanto tempo é necessário para que a direção da velocidade da pedra faça o ângulo de 30° com a direção de tiro? Você mesmo fixará o módulo da velocidade inicial.

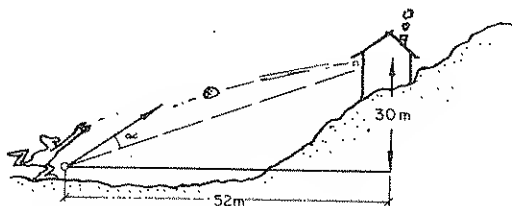
*VIII-39 Você lança uma pedra do terraço de um edifício de 6 andares. O ângulo de tiro é 30° <u>acima da horizontal</u>.

A que distância do pé do edifício cairá a pedra?

Fixe valores numéricos para os parâmetros necessários.

Sugestão: Você pode evidentemente trabalhar em coordenadas retangulares (Problema VIII-27).

Mas é também muito interessante trabalhar com os eixos naturais.

Você porém terá que provar que a equação da reta D da figura ao lado é $y = h + x \operatorname{sen}\alpha$, com as notações indicadas.

*VIII-40 Quando o Martins era criança êle levou uma surra (entre outras) porque um dia com sua atiradeira, êle quebrou um vidro de janela.

As dimensões relevantes da "experiência" são dadas na figura.

A velocidade inicial da pedra devia ser da ordem de 30 m/s.

Qual era o ângulo de tiro $\underline{\alpha}$?

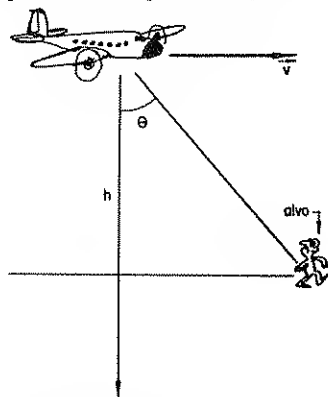
<u>Sugestão</u>: O que eu peço, no fundo, é o seguinte: você conhece o alcance numa direção OA e você tem que determinar o ângulo de tiro. Você já sabe que devem existir dois ângulos possíveis. Como a finalidade nossa <u>não é</u> submergir-mos debaixo de toneladas de cálculos, eu lhe aconselho a operar da maneira seguinte: a partir da expressão (VIII-24) você deve achar sem muita dificuldade: $\operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha + 30^{\circ}) = 0,25$. Com o auxílio de uma tábua de funções trigonométricas, dê a $\underline{\alpha}$ valores sucessivos (5°, 10°, 15°...) e calcule para cada um dêsses valores o produto $\operatorname{sen}\alpha \cos(\alpha + 30^{\circ})$ até você achar 0,25.

Se você achar êsse processo muito "elementar" console-se. É assim que um computador resolveria a equação se você pedisse.

Em tempo: você deve achar que o Martins estava atirando mais ou menos nas condições do alcance máximo na direção dada. Mas como mais uma vez você não é obrigado a acreditar em tudo que eu digo (e como também eu posso ter errado nas minhas contas), faça os cálculos.

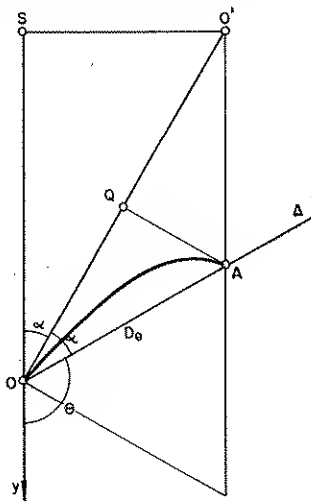
VIII-41 Um bombardeiro vôa horizontalmente com velocidade constante $\vec{v}$, a uma altitude $\underline{h}$.

O instante em que deve largar as bombas é determinado pelo valor do ângulo $\underline{\theta}$.

Determine θ (pela sua tangente trigonométrica), em função de $\underline{v}$ $\underline{g}$ $\underline{h}$.

VIII-42 A flecha de um projétil acima do terreno horizontal que contém a origem é $1,0 \times 10^2$m. Durante quanto tempo o projétil permanece no ar? $g \simeq 10$ m/s^2.

VIII-43 Suponha que no problema precedente o alcance seja $4,0 \times 10^2$m. Qual é o ângulo de tiro?

*VIII-44 Vamos estudar de um pouco mais perto essa questão do alcance máximo D_θ numa direção dada.

A Figura abaixo é para lembrar as notações do texto.

Achamos que o alcance máximo na direção OA se dá quando o ângulo de tiro $\underline{\alpha}$ é igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ (a direção de tiro é a bissetriz do ângulo suplementar de θ).

Achamos também $D_\theta = \frac{v_o^2}{2g\ sen^2 \frac{\theta}{2}}$.

Observe porém que $\frac{\theta}{2}$ e $\underline{\alpha}$ são complementares, de modo que

$$D_\theta = \frac{v_o^2}{2g\ cos^2\ \alpha}$$

Ora, $D_\theta cos\alpha$ é igual a OQ, não é mesmo?

Qual é o valor de OO'?

Projete O' em S sôbre o eixo Oy. Quanto vale OS?

Qual é o lugar geométrico do ponto O' quando a direção OA varia, permanecendo constante o módulo v_o da velocidade inicial?

Agora atenção: quando varia a direção da reta OA, para cada posição da reta (i.e, para cada valor de θ) você tem um valor de D_θ e um ponto A. Qual é o lugar geométrico dêsses pontos A?

Como? Você acha muito difícil? Mas você não acaba de achar o lugar de O'? E AO não é igual a AO'?

Se você raciocinou certo, você deve caracterizar os pontos A pelo fato que êles equidistam de um ponto fixo e de uma reta fixa.

Isso define uma parábola (fale com o seu Professor de Matemática).

Essa parábola tem como eixo o eixo Oy.

Isso não era necessário pela simetria do problema?

O vértice da parábola é o meio V do segmento OS.

Ou se preferir a projeção de Q sôbre Oy.

A parábola está desenhada em traço forte na figura a seguir.

Mostre (o que é pràticamente evidente) que ela tangencia em A a parábola de tiro.

Essa parábola é chamada <u>parábola de segurança</u>. Por quê? Porque se você estiver <u>fora</u> você não pode ser atingido por um projétil lançado de O com velocidade $\vec{v_o}$ constante <u>em módulo</u>.

VIII-46 Se você teve a coragem de estudar o problema precedente, responda ao seguinte:

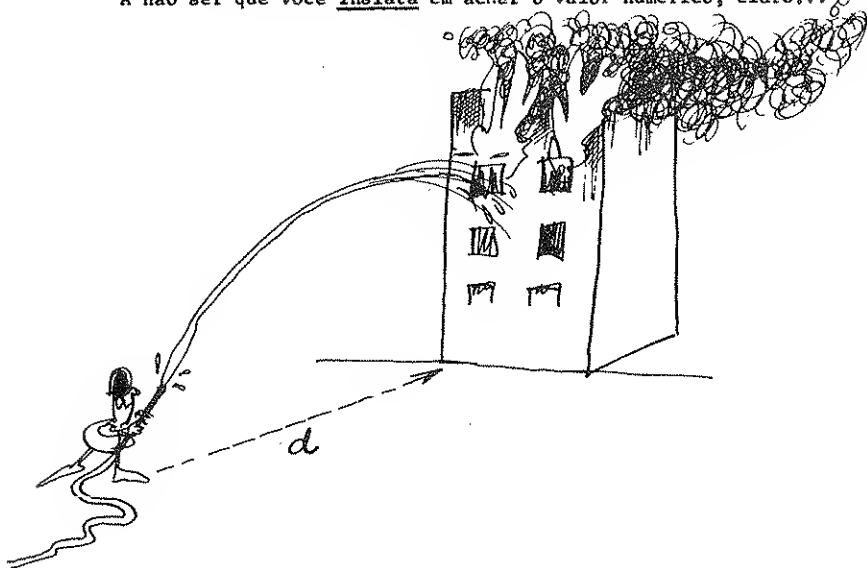
Um edifício está em fogo.

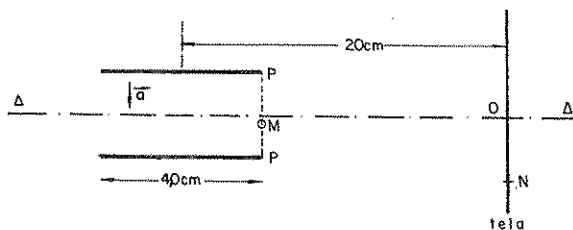
O esguicho dos bombeiros dista d do edifício (por exemplo 30m) e a velocidade de saída da água é v_o (por exemplo 30m/s).

Como é que você faria para achar a altura máxima, no edifício, que pode ser atingida pela água?

Você não precisa entrar nos detalhes.

Conte sòmente como é que você faria.

A não ser que você insista em achar o valor numérico, claro...

*VIII-47 Os elétrons que saem do canhão de um tubo de raios catódicos ao longo do eixo ΔΔ penetram no espaço limitado por duas placas paralelas PP, sendo então submetidos a uma aceleração constante $\vec{a}$ perpendicular ao pla-

no das placas.

Fora do espaço mencionado a aceleração é nula.

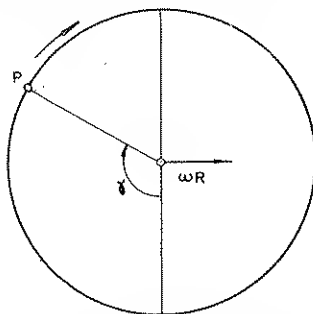
Os elétrons do feixe saem da região de aceleração constante por um ponto M situado a 1,0 mm abaixo do eixo ΔΔ.

Em que ponto N chegam êles à tela do tubo?

*VIII-48 Para fazer êste problema é preciso que você tenha feito os VIII-15, VIII-16 e VIII-17.

Imagine uma roda de bicicleta que rola sem deslizar sôbre um plano horizontal com velocidade uniforme $v = \omega R$.

Em dado instante um pedaço de lama P se destaca da roda.

Você poderá precisar a posição de P pelo ângulo γ da figura.

Descreva semi-qualitativamente o que acontece a êste pedaço de lama:

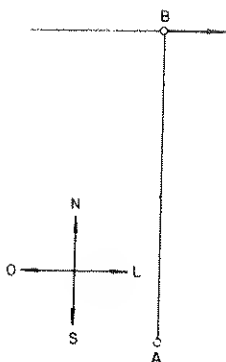
a) no referencial terrestre (S).

b) no referencial (S') da bicicleta.

No caso do pedaço ser lançado para cima, você pode me dizer <u>imediatamente</u> como se comparam as alturas (acima da eatrada) atingidas em (S) e em (S')?

*VIII-49 O carro B anda para Leste com velocidade constante.

O carro A está parado, e no inatante em que B passa ao Norte dêle, êle entra em movimento uniformemente acelerado, indo para Norte.

Qual é a trajetória do carro B no referencial do carro A?

*VIII-50 Suponha que os dois carros do problema precedente estão parados nas posições indicadas na figura.

No instante zero ambos iniciam um movimento uniformemente acelerado, com a mesma aceleração.

O carro A vai para Norte e o carro B vai para Leste.

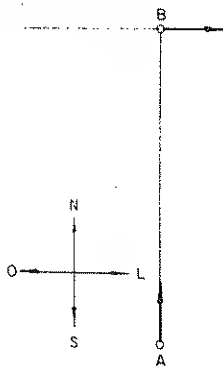
Qual é a trajetória do carro B no referencial do carro A?

*VIII-51 Já que estamos brincando com carros, mais um problema.

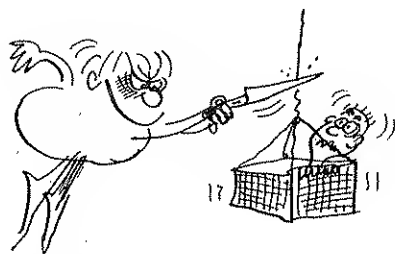
Os carros A e B tinham velocidades constantes de mesmo módulo.

No instante zero êles estão nas posições representadas na figura.

A partir dêsse instante o carro B continua com a mesma velocidade constante, mas o carro A começa a acelerar uniformemente, sempre indo para Norte.

Qual é a trajetória do carro B no referencial do carro A?

*VIII-52 No instante em que o canhão do irmãozinho do Martins dispara (Problema VIII-35), Martins corta a corda que sustenta uma cesta em que está o dito irmãozinho.

E consequentemente, o irmãozinho cai em queda livre, sem velocidade inicial.

Descreva o movimento da bola como o vê o irmãozinho (trajetória, velocidade, aceleração).

*VIII-53 No mesmo instante dois projéteis são lançados no mesmo plano vertical com velocidades iniciais respectivas $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

A que condições devem satisfazer as velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ para que os projéteis se encontrem?

VIII-54 A propósito de movimentos de projéteis, há um problema clássico conhecido como "problema do macaco".

Um caçador avista um macaco pendurado no galho de uma árvore e atira nêle com uma espingarda, apontando o cano diretamente para o macaco.

Porém, no instante em que o macaco percebe o clarão do disparo, êle larga o galho e cai em queda livre.

Conseguirá o macaco escapar a seu triste destino?

*VIII-55 Você está viajando de trem do Rio para São Paulo. Em determinado trecho o vagão no qual você está, anda em movimento retilíneo uniforme (no referencial terrestre) e você decide fazer algumas experiências com uma pedra (que você deve ter sempre no bolso).

a) Você deixa cair a pedra. Descreva o seu movimento no referencial do vagão (S') e no referencial terrestre (S).

b) Você lança a pedra horizontalmente. Descreva o seu movimento em (S') e em (S).

c) Suponha agora que as janelas do vagão estão fechadas, de modo que você não pode ver a paisagem. Suponha também - o que talvez exija um pouco de imaginação - que a estrada de ferro foi tão cuidadosamente construída que você não sente os trancos que normalmente se sentem quando as rodas passam de um trilho para outro. Em outras palavras você não pode saber pelos seus sentidos se o trem está ou não em movimento.

Você seria capaz de imaginar uma experiência com a sua pedra, que possa lhe dizer se o trem está ou não em movimento?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

CAPÍTULO II

1) A ordem de grandeza do volume total de ar que passa por dia pelos seus pulmões é:

A) $10^3 cm^3$; B) $10^5 cm^3$; C) $10^7 cm^3$; D) $10^9 cm^3$; E) $10^{11} cm^3$.

2) Eu: - Martins, aqui estão cinco medidas de tempo...
Martins - Pode mandar brasa, Professor!...
Eu: - I) 400,28s. II) $0,246 \times 10^3$s. III) 2,458s. IV) 0,0001s. V) 3264s.
Martins - Ótimo!
Eu: - Qual é a mais precisa dessas medidas?
Martins - (Ía falar mas eu tapo a bôca!)
Eu: - Você não, Martins! (Ao leitor) VOCÊ.

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

3) Se a medida de um comprimento fôr expressa por $8,42 \times 10^3$m o êrro relativo (ou imprecisão relativa, ou incerteza relativa...) na medida é da ordem de:

A) uma parte em dez mil (ou 0,01%);
B) uma parte em mil (ou 0,1%);
C) uma parte em dez (ou 10%);
D) uma parte em cem (ou 1%);
E) uma parte em quarenta (ou 2,5%).

4) Você mediu a massa de um corpo e expressa essa medida por 4,82kg. Querendo mudar a unidade para grama qual ou quais das seguintes expressões você escolherá?

I) 4.820g. II) $4,820 \times 10^3$g. III) $4,82 \times 10^3$g.
IV) $0,482 \times 10^2$g. V) $0,482 \times 10^4$g.

A) a expressão II;

B) as expressões I ou II, preferìvelmente a II;

C) a expressão III;

D) as expressões III ou IV, preferìvelmente a III;

E) as expressões III ou V, preferìvelmente a III.

5) Quando você expressa o resultado de uma medida de comprimento por 214,23m, isto significa que o comprimento:

A) é verdadeiramente igual a 214,23m;

B) foi medido com margem de incerteza de um metro;

C) situa-se provàvelmente entre 214,225m e 214,235m;

D) foi efetivamente medido com uma régua graduada em metro;

E) é mais provàvelmente igual a 214,23m de que a qualquer outro valor numérico.

6) As dimensões de uma fôlha de papel são 18,2cm e 25,4cm. A área da fôlha em cm^2 deve ser expressa por:

A) 462,28; B) 462,3; C) 462; D) 462,2; E) $4,6 \times 10^2$.

7) Quais das seguintes expressões numéricas têm o mesmo número de algarismos significativos?

I) 0,002402. II) $4,003 \times 10^2$kg. III) 0,082150s.

IV) $2,45 \times 10^2$m. V) 13,0088km.

A) IV e V;

B) I e II;

C) I, II e III;

D) I e III;

E) tôdas as expressões escritas têm números diferentes de algarismos significativos.

8) A expressão $0{,}02040 \times 10^3$m é fornecida com quantos algarismos significativos?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

9) Você me fornece as seguintes informações:

massa de um pedaço de alumínio: 94,047g
volume do pedaço de alumínio: 34,8cm^3

O valor mais preciso da massa específica do alumínio que eu posso obter a partir dêsses dados é:

A) 3 g/cm^3; B) 2,7 g/cm^3; C) 2,70 g/cm^3; D) 2,702 g/cm^3; E) 2,7025 g/cm^3.

10) Uma saca de café de sessenta quilos tem massa igual a:

A) 60kg; B) 6×10^1kg; C) 60,0kg; D) 60,00kg; E) 60,000kg.

11) A ordem de grandeza do número de jornais vendidos por dia na Guanabara é:

A) 10^4; B) 10^6; C) 10^7; D) 10^8; E) 10^9.

12) A ordem de grandeza do comprimento total de tôdas as ruas da cidade do Rio de Janeiro é:

A) 10km; B) 10^2km; C) 10^3km; 0) 10^5km; E) 10^6km.

13) A ordem de grandeza do número de aparelhos receptores de TV existentes na cidade do Rio de Janeiro é:

A) 10^2; B) 10^4; C) 10^6; D) 10^8; E) 10^{10}.

14) A ordem de grandeza da distância Rio-Brasília é:

A) 10^3km; B) 10^5km; C) 10^7km; D) 10^9km; E) 10^{11}m.

15) Supondo que um pneu de automóvel gaste em 5×10^4km. Qual é a ordem de grandeza da espessura de borracha gasta, em média, por volta do pneu?

A) 10^{-1}m; B) 10^{-3}m; C) 10^{-5}m; D) 10^{-7}m; E) 10^{-9}m.

16) A ordem de grandeza da distância da Terra à Lua é:

A) 10^2km; B) 10^4km; C) 10^6km; D) 10^8km; E) 10^{10}km.

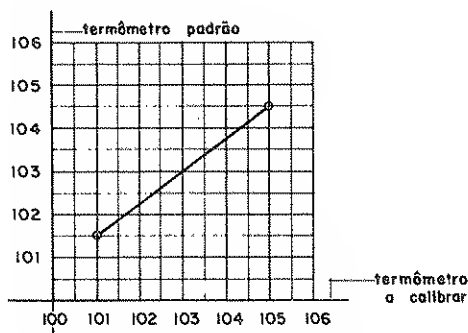
17) A ordem de grandeza da distância da Terra ao Sol é:

A) 10^2km; B) 10^4km; C) 10^6km; D) 10^8km; E) 10^{10}km.

18) A ordem de grandeza do número de planêtas no sistema solar é:

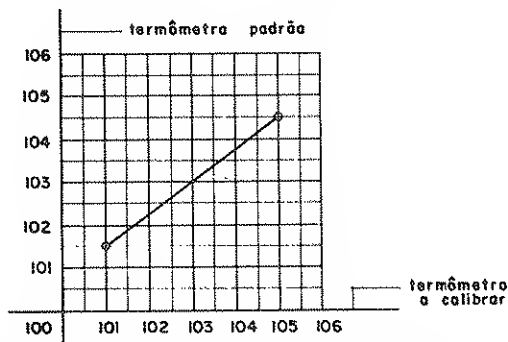
A) 10^0; B) 10^1; C) 10^2; D) 10^3; E) 10^4.

CAPÍTULO III

19) O gráfico abaixo representa a curva de calibração de um termômetro;

quando o termômetro a calibrar indica 104° a temperatura é aproximadamente:

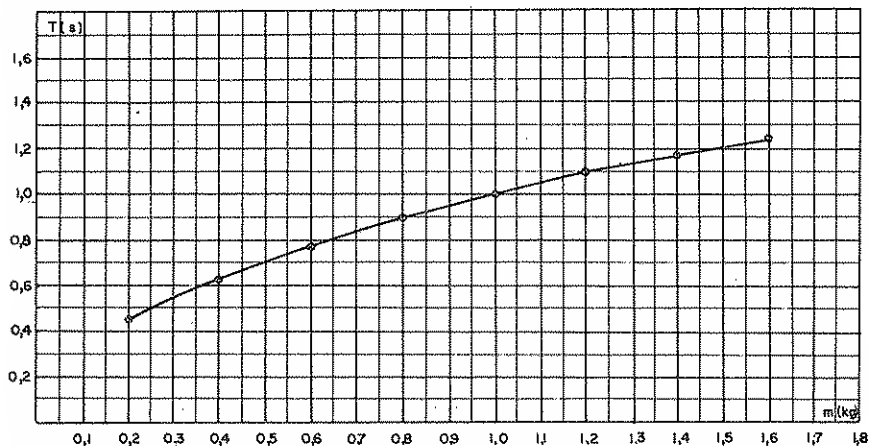
A) 104,0°C; B) 103,7°C; C) 104,4°C; D) 104,8°C;

E) não pode ser determinado pelo gráfico fornecido.

20) O gráfico abaixo representa a curva de calibração de um termômetro;

quando o termômetro a calibrar indica 100° a temperatura é aproximadamente:

A) 100,8°C; B) 99°C; C) 99,5°C; D) 100°C;

E) não pode ser determinado pelo gráfico fornecido.

As perguntas 21 a 24 referem-se ao gráfico abaixo, que representa as variações do período de um pêndulo formado por uma pedra suspensa a um elástico, em função da massa da pedra (oscilações verticais).

21) A taxa de variação média do período em função da massa, entre os valores 0,4kg e 1,4kg é aproximadamente igual a:

A) 0,56s/kg; B) 0,56kg/s; C) 0,17s/kg; D) 0,17kg/s;
E) nenhum dos valores propostos.

22) A taxa de variação instantânea do período em função da massa, para o valor 0,4kg da massa, é aproximadamente igual a:

A) 0,4s/kg; B) 0,4kg/s; C) 0,8s/kg; D) 0,8kg/s;
E) nenhum dos valores propostos.

23) O coeficiente angular da tangente à curva, no ponto correspondente ao valor 0,4kg para a massa, é igual a:

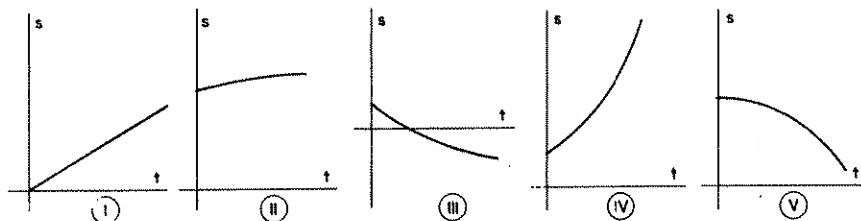
A) 0,4; B) 2,5; C) 0,8; D) 1,3; E) nenhum dos valores propostos.

24) Se um fio de nylon de 1mm de diâmetro aguenta uma carga de 250kg, outro fio de nylon de 2mm de diâmetro aguentará uma carga de:

A) 125kg; B) 250kg; C) 500kg; D) 750kg; E) 1000kg.

CAPÍTULO IV

Perguntas 25 a 32.

25) São dados os gráficos abaixo e supõe-se que as escalas para s, bem como as para t, são as mesmas em todos os gráficos:

Em qual dos cinco movimentos a partícula atinge a maior velocidade?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

26) Em qual dos cinco movimentos a partícula tem, em determinado instante, velocidade nula?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

27) Em qual dos cinco movimentos a partícula tem velocidade constante?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

28) Em qual ou quais dos cinco movimentos a partícula tem velocidade sempre crescente em valor absoluto?

A) I; B) II e IV; C) III e V; D) IV; E) IV e V.

29) Em qual ou quais dos cinco movimentos a partícula tem velocidade sempre decrescente em valor absoluto?

A) I; B) II e III; C) II e V; D) III e V; E) II e IV.

30) Em qual ou quais dos cinco movimentos a partícula, se desloca sempre no sentido positivo da trajetória?

A) II e IV; B) III; C) I, II e IV; D) III e V; E) V.

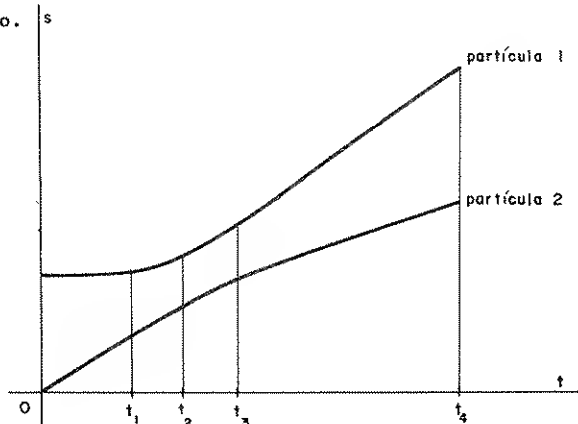
31) Em qual ou quais dos cinco movimentos a partícula dá meia volta, invertendo o sentido de seu movimento?

A) I; B) III; C) II e IV; D) V; E) em nenhum.

32) Em qual ou quais dos cinco movimentos a partícula se desloca sempre no sentido negativo da trajetória?

A) II e IV; B) III; C) I, II e IV; D) III e V; E) V.

Perguntas 33 a 35.

O gráfico abaixo representa as posições escalares de duas partículas em função do tempo.

33) A distância entre as partículas aumentou contìnuamente durante o intervalo:

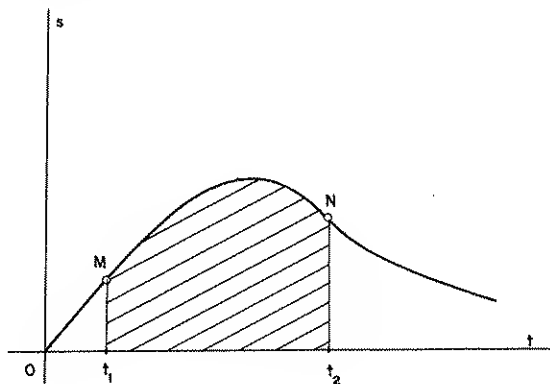
A) $(0\ t_1)$; B) $(0\ t_2)$; C) $(0\ t_3)$; D) $(t_2\ t_4)$; E) $(0\ t_4)$.

34) A distância entre as partículas diminuiu contìnuamente durante o intervalo:

A) $(0\ t_2)$; B) $(0\ t_3)$; C) $(t_1\ t_3)$; D) $(t_1\ t_4)$; E) $(0\ t_4)$.

35) Durante o intervalo $(t_1\ t_3)$ podemos afirmar que:

A) ambas as partículas conservaram velocidades constantes;
B) a partícula (1) acelerou e a partícula (2) decelerou;
C) a partícula (1) decelerou e a partícula (2) acelerou;
D) a velocidade da partícula (1) foi sempre maior que a da partícula (2);
E) a velocidade da partícula (1) foi sempre menor que a da partícula (2).

As perguntas 36 a 38 referem-se ao gráfico seguinte que representa a posição escalar de uma partícula em função do tempo.

36) A variação da posição da partícula entre os instantes t_1 e t_2 é proporcional:

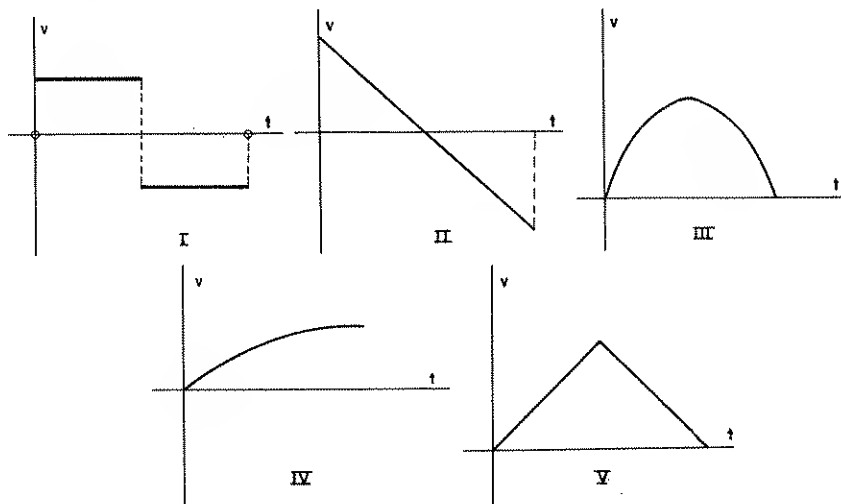
A) à área sombreada do gráfico;
B) à razão entre a variação do coeficiente angular da tangente ao gráfico no intervalo $(t_1\ t_2)$, e a diferença $t_2 - t_1$;
C) a diferença entre as ordenadas de N e M;
D) ao coeficiente angular da corda MN;
E) à razão entre o coeficiente angular da corda MN e a diferença $t_2 - t_1$.

37) A aceleração média no intervalo $(t_1\ t_2)$ é proporcional a:

A) à área sombreada do gráfico;
B) à razão entre a variação do coeficiente angular da tangente ao gráfico no intervalo $(t_1\ t_2)$, e a diferença $t_2 - t_1$;
C) a diferença entre as ordenadas de N e M;
D) ao coeficiente angular da corda MN;
E) à razão entre o coeficiente angular da corda MN e a diferença $t_2 - t_1$.

38) A velocidade média no intervalo $(t_1\ t_2)$ é proporcional a:

A) à área sombreada do gráfico;
B) à razão entre a variação do coeficiente angular da tangente ao gráfico no intervalo $(t_1\ t_2)$, e a diferença $t_2 - t_1$;
C) a diferença entre as ordenadas de N e M;
D) ao coeficiente angular da corda MN;
F) à razão entre o coeficiente angular da corda MN e a diferença $t_2 - t_1$.

As perguntas 39 a 42 referem-se aos movimentos de cinco "partículas". São dados os gráficos $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ dêsses movimentos.

39) O gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ associado ao movimento de uma pedra lançada verticalmente para cima (desprezando a resistência do ar) é:

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

40) O gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ de uma pedra caindo sem velocidade inicial na água de um lago é:

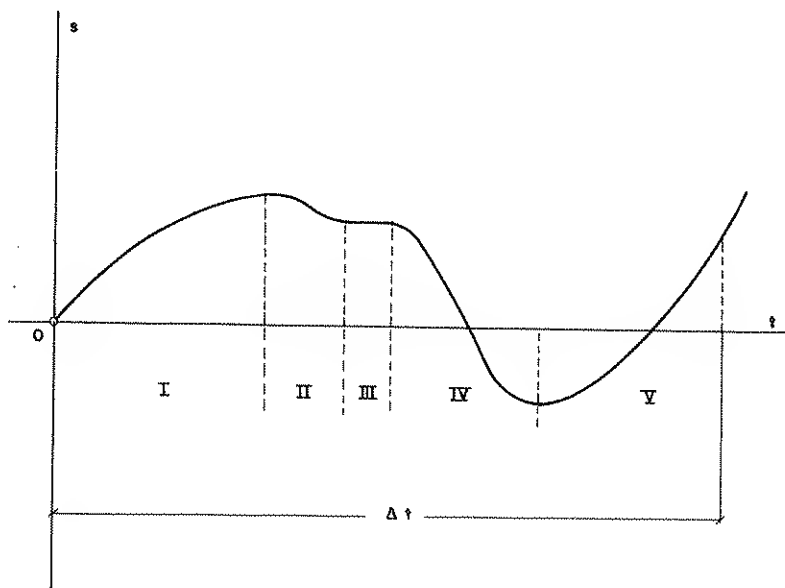
A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

41) O gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ de um carro que acelera uniformemente a partir do repouso para a seguir freiar com deceleração uniforme é:

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

42) O gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ de uma bola de bilhar que bate perpendicularmente contra a tabela e volta é:

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

As perguntas 43 a 48 referem-se ao gráfico seguinte, que representa a posição escalar $\underline{s}$ de uma partícula em função do tempo.

O intervalo Δt foi dividido em 5 sub-intervalos identificados por I, II, III, IV e V.

Considere por outro lado as afirmações seguintes:

1) a posição permanece constante.
2) a velocidade permanece constante.
3) a velocidade é sempre positiva ou nula.

4) a velocidade é sempre negativa ou nula.
5) a aceleração permanece constante.
6) a aceleração é sempre positiva.
7) a aceleração é sempre negativa.

43) Durante o sub-intervalo I as afirmações necessàriamente certas são:

A) 3,6; B) 1,3,7; C) 3,5,7; D) 3,7; E) 3,5.

44) Durante o sub-intervalo II as afirmações necessàriamente certas são:

A) 3,6; B) 4; C) 3; D) 7; E) 4,7.

45) Durante o sub-intervalo III as afirmações necessàriamente certas são:

A) 1,2,5; B) 1; C) 1,2; D) 1,2,3; E) 1,2,3,6.

46) Durante o sub-intervalo IV as afirmações necessàriamente certas são:

A) 4; B) 3,6; C) 4,7; D) 7; E) 3.

47) Durante o sub-intervalo V as afirmações necessàriamente certas são:

A) 1,3,6; B) 3,5,6; C) 3,6; D) 3,7; E) 3,5.

48) A aceleração da partícula se anula nos intervalos:

A) I; B) II, III, IV; C) II, III, IV, V; D) IV, V.
E) I, II, III, IV, V.

Perguntas 49 a 51 .

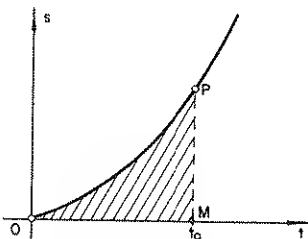
49) O gráfico abaixo é o gráfico s vs t de uma partícula.

A posição escalar do móvel no instante t_o é proporcional:

A) à área do triângulo OMP;

B) à ordenada $\overline{MP}$;

C) ao coeficiente angular da reta OP;

D) ao coeficiente angular da tangente em P à curva;

E) à área sombreada.

50) A velocidade média entre os instantes zero e t_o é proporcional:

A) à área do triângulo OMP;

B) à ordenada $\overline{MP}$;

C) ao coeficiente angular da reta OP;

D) ao coeficiente angular da tangente em P à curva;

E) à área sombreada.

51) A velocidade instantânea no instante t_o é proporcional:

A) à área do triângulo OMP;

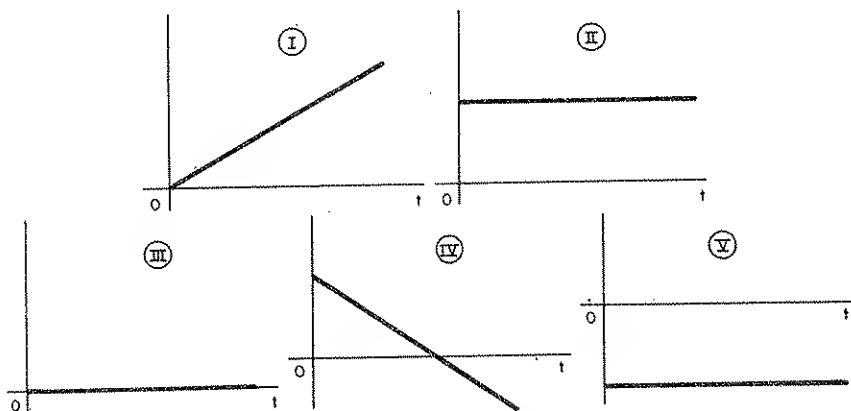
B) à ordenada $\overline{MP}$;

C) ao coeficiente angular da reta OP;

D) ao coeficiente angular da tangente em P à curva;

E) à área sombreada.

52) São propostos os cinco gráficos seguintes, em que o eixo horizontal é sem pre o eixo dos tempos. O eixo vertical pode ser eixo das posições escala-

res s, eixo das velocidades escalares v, ou eixo das acelerações escalares a.

Qual ou quais das seguintes combinações (s vs t, v vs t a vs t) podem referir-se a um mesmo movimento?

	s vs t	v vs t	a vs t
1	II	III	III
2	V	IV	V
3	II	I	III
4	IV	II	III
5	III	III	III
6	IV	II	II
7	IV	V	III
8	I	II	III

A) 1578; B) 1578; C) 78; D) 2346; E) tôdas.

53) Considere o gráfico v vs t a seguir, e as afirmações propostas a seguir:

I) A velocidade inicial da partícula é positiva.

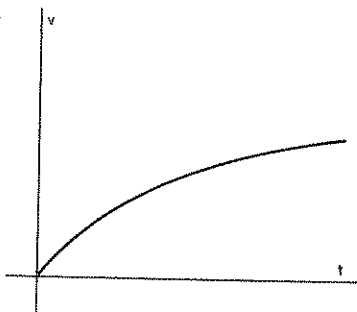
II) A aceleração escalar é sempre positiva.

III) A posição da partícula é sempre positiva.

IV) A partícula vai sempre no sentido positivo da trajetória.

V) A velocidade inicial é nula.

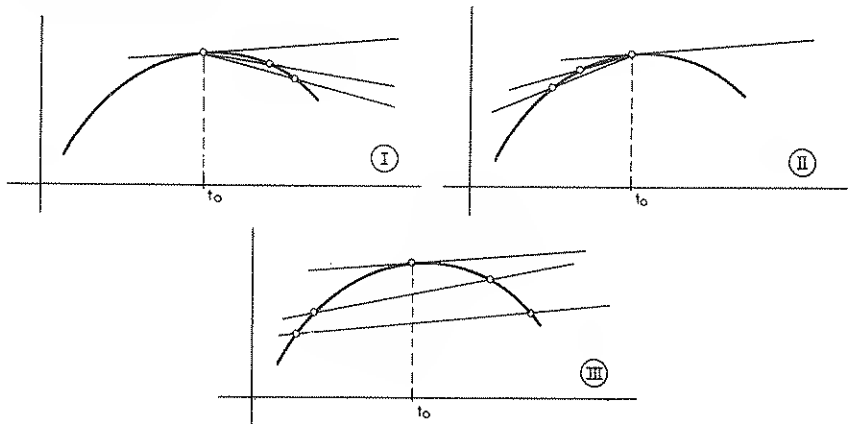
VI) A aceleração inicial é positiva.

VII) A aceleração inicial é nula.

Qual ou quais dessas afirmações são verdadeiras?

A) I, II, III, IV; B) IV, V, VII; C) I, IV, VII;
D) I, II, IV, VI; E) II, IV, V, VI.

54) Essa pergunta refere-se ao conceito de velocidade escalar instantânea, considerada como limite de velocidade média.

Os três gráficos a seguir representam o mesmo trecho de um gráfico $\underline{s}$ vs $\underline{t}$.

Você quer achar a velocidade instantânea da partícula no instante $\underline{t_o}$. Três processos gráficos de passagens ao limite são propostos. Qual dêles você poderá escolher?

A) sòmente I; B) sòmente II; C) sòmente III;

D) sòmente I ou II; E) qualquer um dos três.

55) Em Cinemática, a gente usa constantemente o tempo (<u>t</u>), e intervalos de tempo (Δt).

Essas grandezas são escalares e consequentemente são medidas com números algébricos.

Podemos afirmar que, sempre:

A) <u>t</u> > 0; Δt pode ser qualquer;

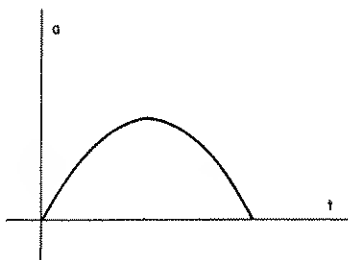
B) <u>t</u> e Δt podem ser quaisquer;

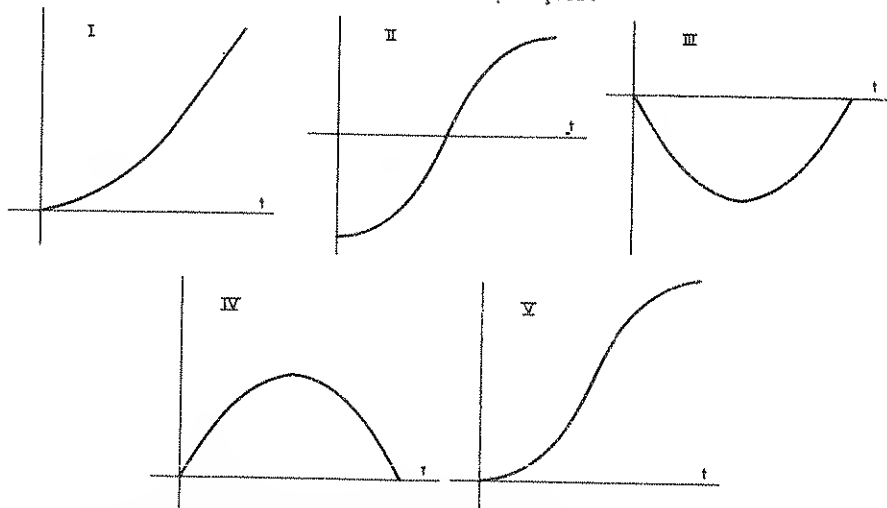
C) <u>t</u> e Δt > 0;

D) <u>t</u> pode ser qualquer; Δt > 0;

E) <u>t</u> > 0; Δt < 0.

Perguntas 56 e 57.

Uma partícula tem, ao longo de uma trajetória uma aceleração escalar representada em função do tempo pelo gráfico seguinte:

Considere por outro lado os cinco gráficos seguintes, em que as or-

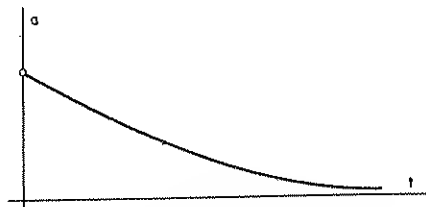
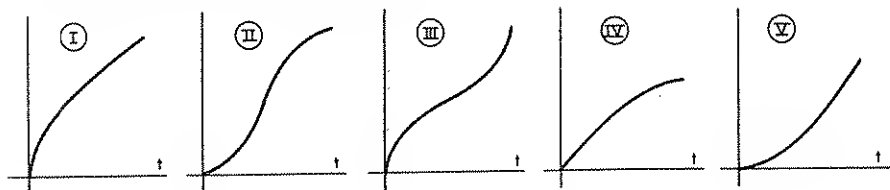
denadas podem representar velocidades ou posições.

56) Sabendo-se que em $t = 0$, $v = 0$, o gráfico que melhor representa a velocidade escalar v em função do tempo t é:

A) I;
B) II;
C) III;
D) IV;
E) V.

57) Sabendo-se que em $t = 0$, $s = 0$, o gráfico que melhor representa a posição s em função do tempo t é:

A) I;
B) II;
C) III;
D) IV;
E) V.

Perguntas 58 e 59.

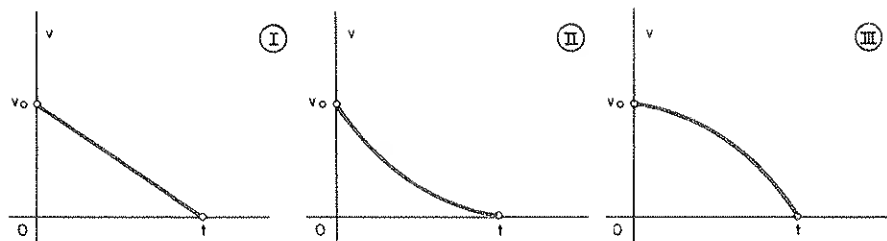
O gráfico a vs t do movimento de uma partícula é representado abaixo:

Considere agora os cinco gráficos seguintes, em que as ordenadas podem representar velocidades ou posições.

58) Sabendo-se que em t = 0, v = 0, o gráfico v vs t deve ser:

A) I;
B) II;
C) III;
D) IV;
E) V.

59) Sabendo-se que em t = 0, s = 0; o gráfico s vs t deve ser:

A) I;
B) II;
C) III;
D) IV;
E) V.

60) Nos três movimentos cujos gráficos v vs t são propostos a seguir, a partícula tinha a mesma velocidade v_o no instante inicial, e levou o mesmo in-

tervalo de tempo até parar.

Como se comparam as velocidades médias nos movimentos propostos, no intervalo (0, t)?

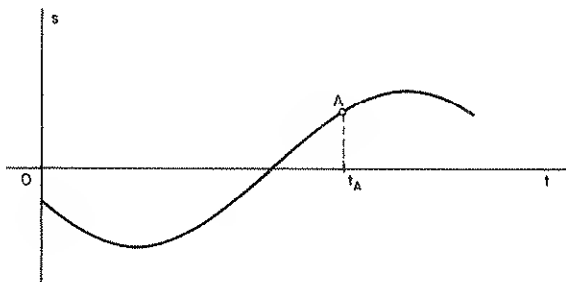
A) $<v>_{I} = <v>_{II} = <v>_{III}$;

B) $<v>_{I} > <v>_{II} > <v>_{III}$;

C) $<v>_{I} < <v>_{II} < <v>_{III}$;

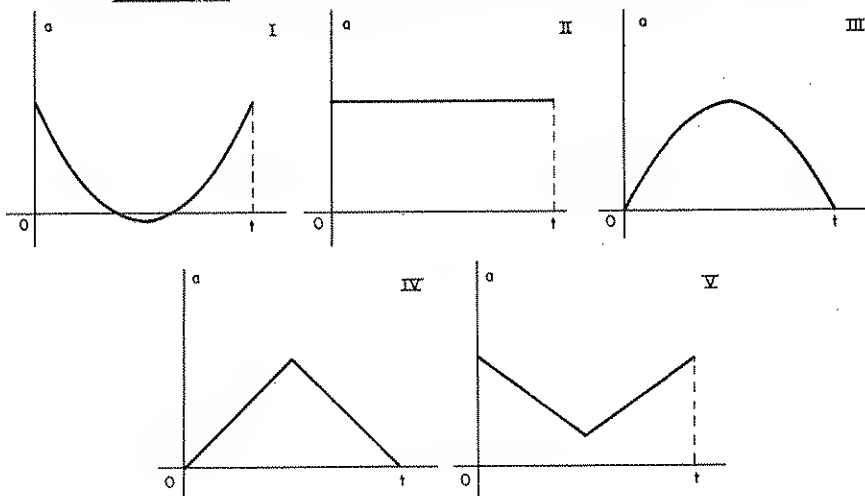
D) $<v>_{II} < <v>_{III} < <v>_{I}$;

E) $<v>_{II} < <v>_{I} < <v>_{III}$.

61) A figura a seguir representa o gráfico s vs t do movimento de uma partícula.

O quadro seguinte propõe algumas opções para os sinais respectivos da posição inicial s_o, da velocidade inicial v_o e da aceleração inicial a_o por um lado, e da posição, da velocidade e da aceleração no instante t_A.

Qual das opções está certa?

	s_o	v_o	a_o	s_A	v_A	a_A
A	-	+	+	+	+	+
B	-	-	+	+	+	+
C	+	-	-	+	+	-
D	-	-	+	+	+	-
E	-	+	-	+	-	+

62) A velocidade escalar de uma partícula é v_o no instante zero e v no instante t. Sabendo-se que, entre êsses dois instantes, a velocidade média da partícula foi $\frac{1}{2}(v_o + v)$, qual ou quais dos seguintes gráficos podem representar a aceleração da partícula em função do tempo, no intervalo (0, t)?

A) todos;

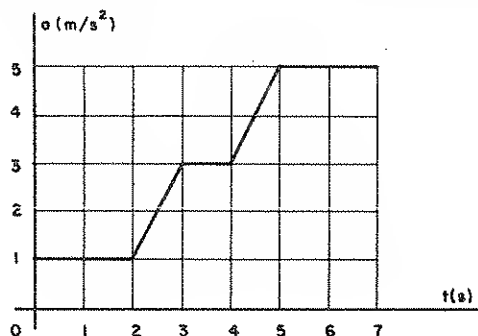
B) nenhum;

C) II;

D) II e III;

E) I, II, III.

63) O gráfico aceleração-tempo do movimento de uma partícula está representado a seguir:

A aceleração escalar média da partícula no intervalo (2s 5s) é igual a:

A) zero;

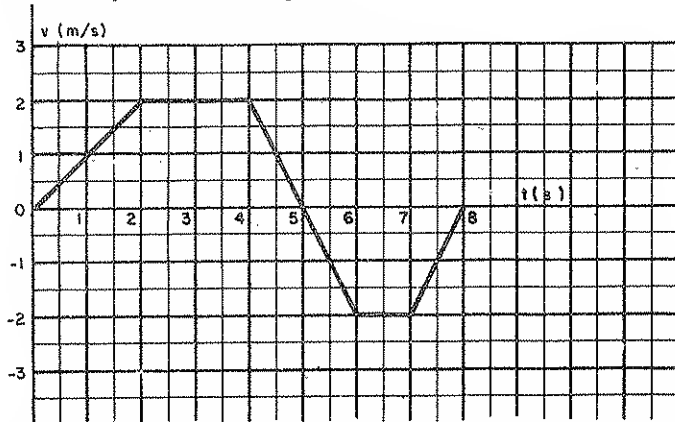
B) 1,0 m/s^2;

C) 2,0 m/s^2;

D) 3,0 m/s^2;

E) 4,0 m/s^2.

Perguntas 64 a 89.

As perguntas 64 a 89 referem-se ao gráfico v vs t do movimento de uma partícula representado a seguir:

64) Entre os instantes t = 0 e t = 2,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 4,0m.

65) Entre os instantes t = 2,0s e t = 4,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 4,0m.

66) Entre os instantes t = 4,0s e t = 6,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 4,0m.

67) Entre os instantes t = 5,0s e t = 8,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 2,0m; C) -2,0m; D) 4,0m; E) -4,0m.

68) Entre os instantes $t = 0$ e $t = 8{,}0s$ a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 4,0m; E) 11m.

69) Entre os instantes $t = 3{,}0s$ e $t = 7{,}0s$ a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 3,0m; C) 6,0m; D) -3,0m; E) -6,0m.

70) Supondo-se que em $t = 0$, $s = 0$, a partícula passará de novo pela origem:

A) em $t = 3{,}0s$; B) em $t = 5{,}0s$; C) em $t = 8{,}0s$; D) em $t = 3{,}0$ e em $t = 7{,}0s$; E) nunca.

71) Supondo-se que em $t = 0$, $s = -4{,}0m$, a partícula passará de novo pela origem:

A) em $t = 3{,}0s$; B) em $t = 5{,}0s$; C) em $t = 8{,}0s$; D) em $t = 3{,}0$ e em $t = 7{,}0s$; E) nunca.

72) A velocidade da partícula no instante $t = 1{,}0s$ era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

73) A velocidade da partícula no instante $t = 3{,}0s$ era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

74) A velocidade da partícula no instante $t = 5{,}0s$ era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

75) A velocidade da partícula no instante $t = 6{,}5s$ era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

76) A velocidade média da partícula no intervalo (0 - 2,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

77) A velocidade média da partícula no intervalo (2,0s - 4,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

78) A velocidade média da partícula no intervalo (2,0s - 6,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

79) A velocidade média da partícula no intervalo (0 - 6,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

80) A velocidade média da partícula no intervalo (3,0s - 7,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

81) A aceleração da partícula no instante t = 1,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) 2,0m/s^2; D) -1,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

82) A aceleração da partícula no instante t = 3,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) 2,0m/s^2; D) -1,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

83) A aceleração da partícula no instante t = 5,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) 2,0m/s^2; D) -1,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

84) A aceleração da partícula no instante t = 6,5s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) 2,0m/s^2; D) -1,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

85) A aceleração média da partícula no intervalo (0 - 2,0s) foi:

A) zero; B) $1,0 m/s^2$; C) $2,0 m/s^2$; D) $-1,0 m/s^2$; E) $-2,0 m/s^2$.

86) A aceleração média da partícula no intervalo (2,0s - 4,0s) foi:

A) zero; B) $1,0 m/s^2$; C) $2,0 m/s^2$; D) $-1,0 m/s^2$; E) $-2,0 m/s^2$.

87) A aceleração média da partícula no intervalo (4,0s - 6,0s) foi:

A) zero; B) $1,0 m/s^2$; C) $2,0 m/s^2$; D) $-1,0 m/s^2$; E) $-2,0 m/s^2$.

88) A aceleração média da partícula no intervalo (0 - 8,0s) foi:

A) zero; B) $1,0 m/s^2$; C) $2,0 m/s^2$; D) $-1,0 m/s^2$; E) $-2,0 m/s^2$.

89) A aceleração média da partícula no intervalo (2,0s - 6,0s) foi:

A) zero; B) $1,0 m/s^2$; C) $2,0 m/s^2$; D) $-1,0 m/s^2$; E) $-2,0 m/s^2$.

Perguntas 90 a 105.

As perguntas 90 a 105 referem-se ao gráfico s vs t do movimento de uma partícula, representado a seguir:

90) Entre os instantes t = 0 e t = 2,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 4,0m.

91) Entre os instantes t = 2,0s e t = 4,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 4,0m.

92) Entre os instantes t = 4,0s e t = 6,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) -1,0m; D) 4,0m; E) -4,0m.

93) Entre os instantes t = 5,0s e t = 7,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) -1,0m; D) 2,0m; E) -2,0m.

94) Entre os instantes t = 0 e t = 8,0s a posição da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m; C) 5,0m; D) 8,0m; E) 11m.

95) Em qual dos seguintes instantes você pode <u>afirmar</u> que a partícula estava parada?

A) t = 0; B) t = 1,0s; C) t = 3,0s; D) t = 5,0s;
E) t = 5,5s.

96) A velocidade da partícula no instante t = 1,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

97) A velocidade da partícula no instante t = 3,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

98) A velocidade da partícula no instante t = 5,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

99) A velocidade da partícula no instante t = 6,5s era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

100) A aceleração da partícula mo instante t = 1,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) -1,0m/s^2; D) 2,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

101) A aceleração da partícula no instante t = 3,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) -1,0m/s^2; D) 2,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

102) A aceleração da partícula no instante t = 5,0s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) -1,0m/s^2; D) 2,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

103) A aceleração da partícula no instante t = 6,5s era:

A) zero; B) 1,0m/s^2; C) -1,0m/s^2; D) 2,0m/s^2; E) -2,0m/s^2.

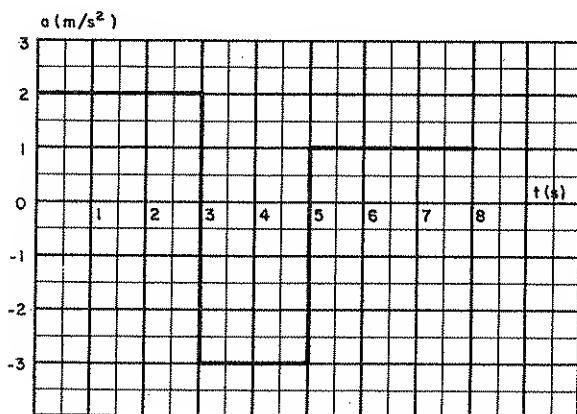
104) Entre os instantes t = 0 e t = 5,0s a velocidade média da partícula foi:

A) zero; B) 0,5m/s; C) 1,0m/s; D) -0,5m/s; E) -1,0m/s.

105) Entre os instantes t = 4,0s e t = 5,0s a velocidade média da partícula foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) -1,0m/s; D) 2,0m/s; E) -2,0m/s.

Perguntas 106 a 129.

As perguntas 106 a 129 referem-se ao gráfico a vs t do movimento de uma partícula, representado abaixo:

106) Entre os instantes t = 0 e t = 3,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

107) Entre os instantes t = 0 e t = 4,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; 0) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

108) Entre os instantes t = 0 e t = 5,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; 0) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

109) Entre os instantes t = 0 e t = 8,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; 0) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

110) Entre os instantes t = 0 e t = 6,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

111) Entre os instantes t = 2,0s e t = 8,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

111) Entre os instantes t = 1,0s e t = 7,0s a velocidade da partícula variou de:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) -1,0m/s; E) -2,0m/s.

113) Em t = 0, a velocidade da partícula era nula. Em t = 4,0s a velocidade era:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

114) Em t = 0, a velocidade da partícula era nula. Em t = 5,0s a velocidade era:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

115) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade em t = 3,0s era:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s: D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

116) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade em t = 4,0s era:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

117) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade em t = 8,0s era:

A) zero; B) 3,0m/s; C) 6,0m/s; D) -3,0m/s; E) -6,0m/s.

118) Em t = 0, a partícula estava na origem com velocidade nula. Sua posição em t = 3,0s era:

A) zero; B) -3,0m; C) -6,0m; D) 9,0m; E) 15m.

119) Em t = 0, a partícula estava na origem com velocidade nula. Sua posição em t = 5,0s era:

A) zero; B) -3,0m; C) -6,0m; D) 9,0m; E) 15m.

120) Em t = 0, a posição da partícula era +15m, e a velocidade era -3,0m/s. Sua posição em t = 3,0s era:

A) zero; B) -3,0m; C) -6,0m; D) 9,0m; E) 15m.

121) Em t = 0, a posição da partícula era +15m, e a velocidade era -3,0m/s. Sua posição em t = 5,0s era:

A) zero; B) -3,0m; C) -6,0m; D) 9,0m; E) 15m.

122) Em t = 0, a posição da partícula era +15m, e a velocidade era -3,0m/s. Sua posição em t = 8,0s era:

A) zero; B) -3,0m; C) -6,0m; D) 9,0m; E) 15m.

123) No intervalo (0 - 5,0s) a aceleração média da partícula foi:

A) zero; B) $0,60m/s^2$; C) $2,0m/s^2$; D) $-0,60m/s^2$;
E) $-2,0m/s^2$.

124) No intervalo (0 - 3,0s) a aceleração média da partícula foi:

A) zero; B) $0,60m/s^2$; C) $2,0m/s^2$; D) $-0,60m/s^2$;
E) $-2,0m/s^2$.

125) No intervalo (3,0s - 8,0s) a aceleração média da partícula foi:

A) zero; B) $0,60m/s^2$; C) $2,0m/s^2$; D) $-0,60m/s^2$;
E) $-2,0m/s^2$.

126) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade média no intervalo (0 - 3,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 6,0m/s; D) -1,0m/s; E) -6,0m/s.

127) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade média no intervalo (0 - 5,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 6,0m/s; D) -1,0m/s; E) -6,0m/s.

128) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade média no intervalo (3,0s - 5,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 6,0m/s; D) -1,0m/s; E) -6,0m/s.

129) Em t = 0, a velocidade da partícula era -3,0m/s. A velocidade média no in

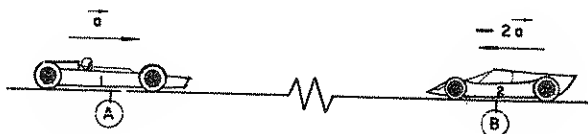
tervalo (3,0s - 7,0s) foi:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 6,0m/s; D) -1,0m/s; E) -6,0m/s.

CAPÍTULO V

130) No instante $t = 0$, o carro nº 1 arranca do marco A de uma pista de corri das, com aceleração constante.

Algum tempo depois, o carro nº 2 arranca do marco B da mesma pista e vai ao encontro do carro nº 1, também com aceleração constante igual ao dôbro (em módulo) da aceleração do carro nº 1.

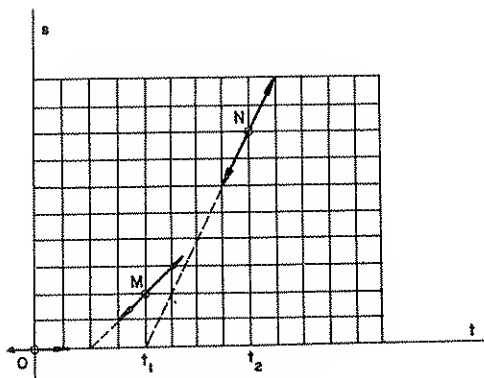
Os dois carros se encontram no meio da distância AB, no instante $t = 20s$. Quanto tempo depois do carro nº 1 arrancou o carro nº 2?

A) 6,0s; B) 10s, C) 12s; D) 14s; E) 18s.

131) Se você lançasse uma pedra verticalmente para cima com velocidade de 20m/s, a pedra subiria até uma altura de 20m (despreza-se a resistência do ar).

Se você lançasse a pedra com velocidade de 10m/s, ela subiria até a altura de:

A) 10m;
B) 15m;
C) 14m;
D) 5m;
E) 7m.

As perguntas 132 a 134 referem-se ao gráfico $\underline{s}$ vs $\underline{t}$ representado a seguir.

Conhecem-se três pontos do gráfico: os pontos O M N, com as respectivas tangentes.

132) A velocidade escalar da partícula no instante t_2 é:

A) o dôbro do que era no instante t_1;

B) quatro vêzes o que era no instante t_1;

C) a metade do que era no instante t_1;

D) igual ao seu valor no instante t_1;

E) igual a zero.

133) A aceleração média no intervalo (t_1 t_2) é:

A) o dôbro do que era no intervalo (0 t_1);

B) quatro vêzes o que era no intervalo (0 t_1);

C) a metade do que era no intervalo (0 t_1);

D) igual ao seu valor no intervalo (0 t_1);

E) igual a zero.

134) Os pontos fornecidos do gráfico s vs t estão condizentes com:

A) um movimento uniforme;

B) um movimento uniformemente acelerado;

C) um movimento uniformemente retardado;

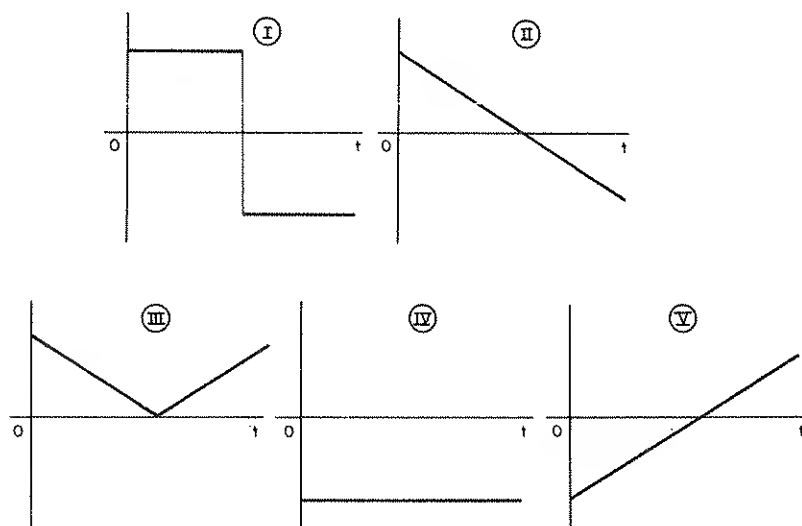
D) um movimento cuja aceleração aumenta proporcionalmente ao tempo;

E) um movimento cuja aceleração decresce proporcionalmente ao tempo.

Perguntas 135 e 136.

Você lança uma pedra verticalmente para cima. A trajetória é orientada positivamente de baixo para cima.

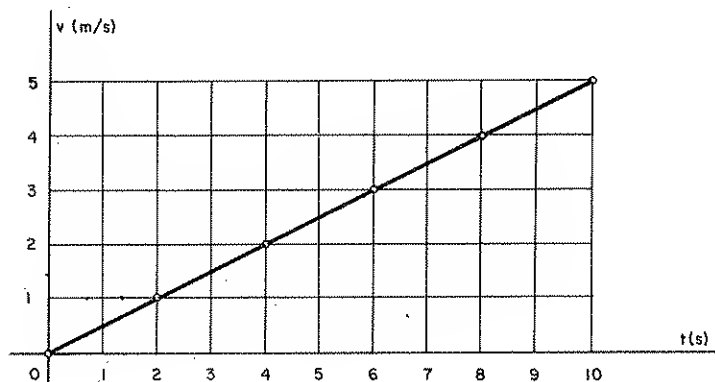
Nos cinco gráficos propostos a seguir, o eixo horizontal é sempre o eixo dos tempos.

O eixo vertical pode ser o eixo das velocidades escalares ou o eixo das acelerações escalares.

135) Qual dos gráficos propostos é o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ do movimento da pedra?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

136) Qual dos gráficos propostos é o gráfico $\underline{a}$ vs $\underline{t}$ do movimento da pedra?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

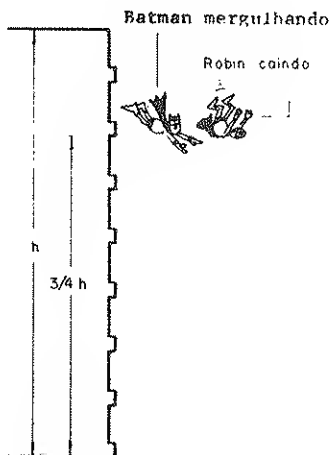
137) Considere o gráfico $\underline{v}$ vs $\underline{t}$ representado abaixo. Em qual dos intervalos propostos a variação de posição da partícula foi igual a 8 metros?

A) (0 4s);
B) (2s 6s);
C) (0 8s);
D) (6s 8s);
E) (6s 10s)

138) Última aventura de Batman:

Batman está na janela situada a $\frac{3}{4}$ da altura do edifício a partir do chão, e vê Robin desacordado caindo em queda livre desde o terraço do edifício.

Batman mergulha sem velocidade inicial mas com Superaceleração.

Qual deverá ser o valor dessa Superaceleração para que Batman pos-

sa salvar Robin? (g é a aceleração da gravidade).

A) 2g; B) 3g; C) 4g; D) 6g; E) 8g.

139) Uma partícula em movimento uniformemente variado tem aceleração de $10m/s^2$ (positiva). No instante zero, a velocidade da partícula é -6,0m/s. Qual é a velocidade média da partícula no intervalo (0, 2s)?

A) 10m/s; B) 4,0m/s; C) -6,0m/s; D) -10m/s; E) -4,0m/s.

Perguntas 140 e 141.

140) Um carro anda a 72km/h... (não se canse! São 20m/s).
O freio pode produzir uma deceleração máxima (em módulo) de $4,0m/s^2$.
Em que distância mínima para o carro?

A) 12,5m; B) 25m; C) 40m; D) 50m; E) 100m.

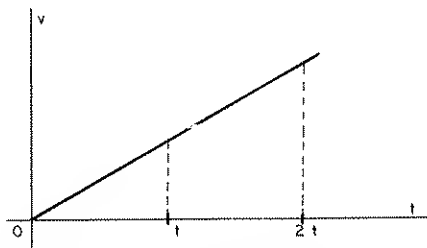
141) Se o carro da pergunta precedente andasse a 36km/h, qual seria a distância mínima em que poderia parar?

A) 12,5m; B) 25m; C) 40m; D) 50m; E) 100m.

142) Uma rampa de lançamento de foguete tem $1,0 \times 10^2$m de comprimento e, na rampa, o foguete é submetido a uma aceleração de $50 m/s^2$.

Qual a velocidade do foguete quando sai da rampa?

A) 50m/s;
B) $1,0 \times 10^2$m/s;
C) $5,0 \times 10^3$m/s;
D) $1,0 \times 10^4$m/s;
E) $5,0 \times 10^4$m/s.

143) O gráfico v vs t do movimento de uma partícula é representado abaixo:

Represente por s a posição da partícula no instante t.
No intervalo (t 2t) a posição da partícula varia de:

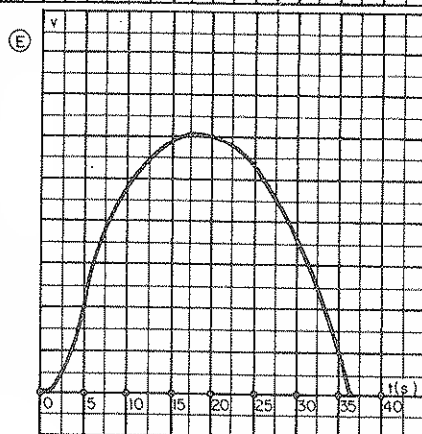
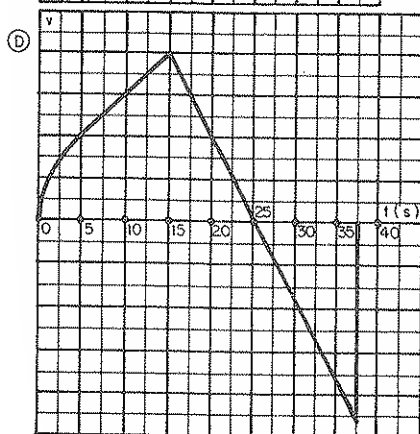
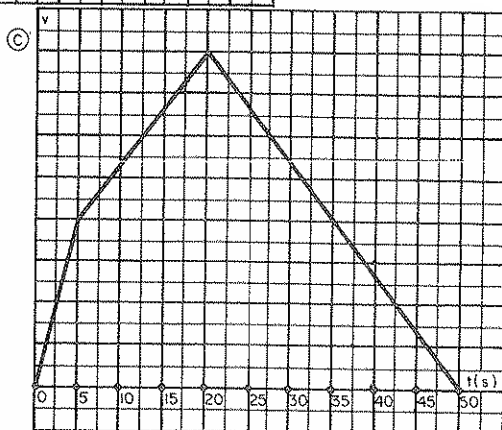
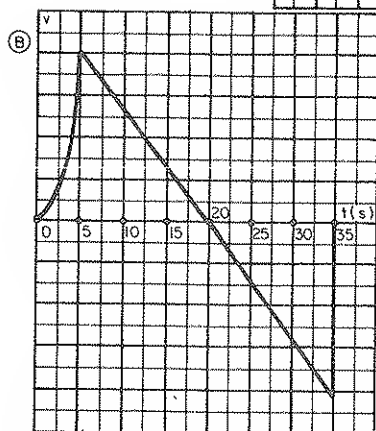
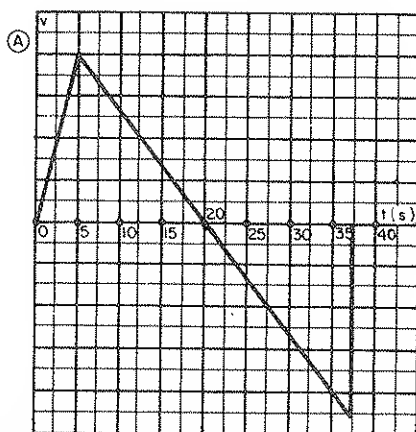
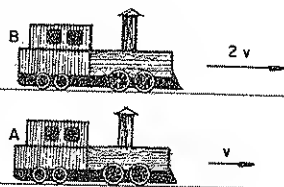
A) $\frac{1}{2}$ s; B) s; C) 2s; D) 3s; E) 4s.

144) Um foguete anti-míssil é disparado verticalmente. O jato funciona durante os cinco primeiros segundos, desligando-se a seguir. Durante o seu funcionamento, o foguete é submetido a uma aceleração constante vertical, dirigida para cima, e igual em módulo a três vêzes a aceleração da gravidade.

Depois de errar o alvo, o foguete volta a cair perto da base de lançamento.

Qual dos gráficos propostos a seguir é o gráfico v vs t do movimen-

to completo?

A
v
t(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
B
v
t(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
C
v
t(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
D
v
t(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
E
v
t(s)
0
5
10
15
20
25
30
35
40

145) Dois trens correm sôbre duas vias paralelas. O trem A tem velocidade v e o trem B tem velocidade 2v. Em dado instante, o trem B alcança o trem A (veja figura). A partir dêsse instante o trem B freia até parar, e durante essa fase do seu movimento, sua aceleração é constante. O trem A continua sempre com velocidade v. Podemos afirmar que:

A) os dois trens permanecerão juntos;

B) o trem B estará sempre atrás do trem A;

C) no instante em que parar, o trem B estará de novo na mesma altura que o trem A, qualquer que seja a aceleração de B;

D) entre o instante em que B começa a freiar e o instante em que para, o espaço percorrido por A é maior que o espaço percorrido por B;

E) entre o instante em que B começa a freiar e o instante em que para, o espaço percorrido por A é menor que o espaço percorrido por B.

146) A situação inicial é idêntica à da pergunta nº 145. Mas agora, no instante em que B ultrapassa A, os trens estão a uma certa distância de uma estação onde ambos devem parar. Naquêle instante então (o da ultrapassagem), ambos os trens começam a freiar, e ambos vão ter aceleração constante.

Se o trem B chega na estação 60s depois da ultrapassagem, o trem A chegará:

A) 60s antes de B;

B) 60s depois de B;

C) 120s antes de B;

D) 120s depois de B;

E) ao mesmo tempo que B.

147) As afirmações propostas a seguir referem-se à cinemática escalar de uma partícula. Assinale as afirmações erradas.

I) Se um movimento é acelerado, a velocidade escalar cresce sempre em valor algébrico;

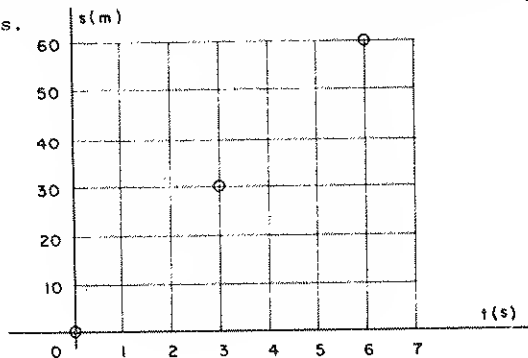
II) Se um movimento é acelerado, a velocidade escalar é sempre positiva.

III) Se um movimento é acelerado, o valor absoluto da velocidade é sempre maior que o valor absoluto da aceleração.

IV) Se um movimento é uniformemente retardado, a velocidade é proporcional ao quadrado do tempo, com um coeficiente de proporcionalidade negativo.

V) Se um movimento é uniforme, a velocidade é uma função linear do tempo.

A) III;
B) III e IV;
C) II, III e IV;
D) II, III, IV e V;
E) I, II, III, IV e V.

148) Três pontos do gráfico s vs t do movimento de um automóvel são representados a seguir. Sabe-se que o movimento iniciou-se em t = 0 e s = 0 por uma fase de movimento uniformemente variado (velocidade inicial nula), seguindo-se uma fase de movimento uniforme, e terminando por uma fase de movimento uniformemente retardado, cuja aceleração é igual em módulo à aceleração da primeira fase. Essa última fase termina em t = 6,0s e s = 60m. Sabe-se também que em t = 3,0s e s = 30m o carro estava na fase de movimento uniforme, com velocidade de 15m/s.

A primeira e a última fase do movimento tiveram duração de:

A) 1,0s; B) 2,0s; C) 3,0s; D) 4,0s; E) 5,0s.

149) (Continuação da 148).

O módulo da aceleração na primeira e na última fase foi igual a:

A) zero; B) $2,5m/s^2$; C) $5,0m/s^2$; D) $7,5m/s^2$;
E) $10m/s^2$.

150) (Continuação da 149).

No intervalo (0 - 6s) a velocidade média do carro foi:

A) 5,0m/s; B) 7,5m/s; C) 10m/s; D) 15m/s;
E) 30m/s.

151) (Continuação da 150).

No intervalo (0 - 6s) a aceleração média do carro foi:

A) zero; B) $2,5m/s^2$; C) $5,0m/s^2$; D) $7,5m/s^2$;
E) $10m/s^2$.

152) (Continuação da 151).

O espaço percorrido durante a fase de movimento uniforme foi:

A) 10m; B) 15m; C) 20m; D) 25m; E) 30m.

153) O carro A andando com velocidade uniforme de 12m/s ultrapassa o carro B no instante em que êste arranca com aceleração constante.

Ao alcançar o carro A, a velocidade do carro B será igual a:

A) 12m/s; B) 18m/s; C) 24m/s; D) 48m/s; E) 144m/s.

154) Uma goteira no alto do poço de um elevador deixa escapar gotas de água a intervalos regulares.

Considere quatro gotas sucessivas, numeradas de 1 até 4 de baixo para cima.

Em determinado instante a distância entre as gotas 1 e 2 excede em 2,4m a distância entre as gotas 2 e 3.

No mesmo instante, a distância entre as gotas 2 e 3 excede de quanto a distância entre as gotas 3 e 4?

A) 0,60m; B) 1,2m; C) 2,4m; D) 3,6m; E) 4,8m.

155) (Refira-se à pergunta precedente).

O intervalo de tempo que separa a queda de duas gotas sucessivas é aproximadamente:

A) 0,1s; B) 0,2s; C) 0,3s; D) 0,4s; E) 0,5s.

156) De um mesmo ponto e no mesmo instante, você deixa cair uma pedra e você lança outra para cima com velocidade $\underline{v_o}$.

No instante em que a velocidade desta última se anula, a velocidade da primeira é igual a:

A) $\frac{1}{4} v_o$; B) $\frac{1}{2} v_o$; C) v_o; D) $\frac{3}{2} v_o$; E) $2v_o$.

157) Você está com o Martins no terraço de um edifício. No mesmo instante, você deixa cair uma pedra, e o Martins lança outra para baixo com velocidade $\underline{v_o}$.

A diferença entre a velocidade da pedra lançada pelo Martins, e a velocidade da sua:

A) é no instante $\underline{t}$ igual a gt;

é no instante $\underline{t}$ igual a $\frac{1}{2} gt^2$;

C) é no instante t igual a $\frac{v_o}{g}$ t;

D) é sempre igual a v_o;

E) é sempre igual a $2v_o$.

158) (Refira-se à pergunta precedente).

Quando a pedra lançada pelo Martins atinge o solo, a sua está ainda à meia altura do edifício. Nêsse instante, as velocidades das duas pedras são respectivamente:

A) $2v_o$ e v_o; B) $3v_o$ e $2v_o$; C) $3v_o$ e v_o; D) $4v_o$ e $3v_o$;

E) $4v_o$ e $2v_o$.

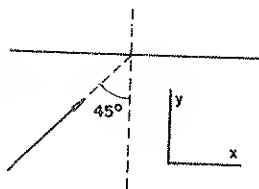
159) (Refira-se à pergunta precedente).

A altura do edifício é:

A) $\frac{v_o^2}{2g}$; B) $\frac{v_o^2}{g}$; C) $\frac{3v_o^2}{2g}$; D) $\frac{2v_o^2}{g}$;

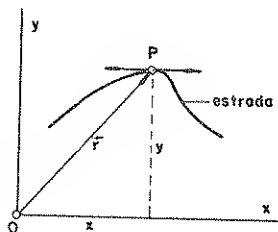
E) $\frac{4\ v_o^2}{g}$.

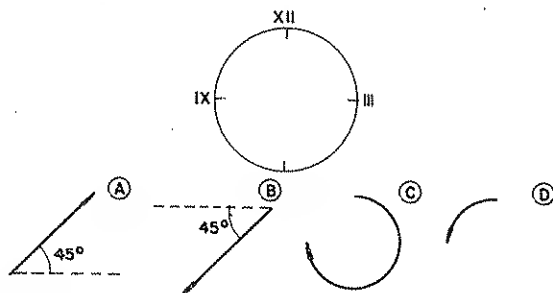
CAPÍTULO VI

160) Jogando sinuca, você manda a bola contra a tabela, debaixo de um ângulo de 45^o e com velocidade de 4,0m/s. Admita que a reflexão na tabela siga as leis da ótica e que a bola refletida tenha a mesma velocidade escalar que a bola incidente.

Podemos afirmar que, na reflexão:

A) A velocidade vetorial é invariante;
B) A velocidade escalar muda de sinal;
C) A velocidade vetorial da bola refletida é oposta à velocidade vetorial da bola incidente;
D) A componente-y da velocidade é invariante; a componente-x inverte-se;
E) A componente-x da velocidade é invariante; a componente-y inverte-se.

161) Um automóvel percorre uma estrada. Em determinado instante, êle passa pela posição P mostrada na figura. Podemos afirmar que, nêsse instante:

A) a velocidade escalar do automóvel é nula;
B) a aceleração é nula;
C) a componente-y da velocidade vetorial é nula;
D) o gráfico $\underline{y}$ vs $\underline{t}$ passa por um máximo;
E) nenhuma das afirmações precedentes é necessàriamente verdadeira.

162) O ponteiro dos <u>minutos</u> de um relógio tem 1,0cm de comprimento. Entre os instantes 8;00h e 8;45h, a variação da posição vetorial da extremidade

do ponteiro é representada por:

E) nenhuma das respostas anteriores.

163) No intervalo de tempo Δt, a velocidade escalar média de uma partícula é $\langle v \rangle$, e sua velocidade vetorial média, $\langle \vec{v} \rangle$.

Podemos afirmar que:

A) $|\langle v \rangle| = |\langle \vec{v} \rangle|$;
B) $|\langle v \rangle| < |\langle \vec{v} \rangle|$;
C) $|\langle v \rangle| \geqslant |\langle \vec{v} \rangle|$;
D) $|\langle v \rangle| > |\langle \vec{v} \rangle|$;
E) $|\langle v \rangle| \leqslant |\langle \vec{v} \rangle|$;

As perguntas 164 a 169 referem-se a três partículas A B C cujas posições estão representadas abaixo.

164) Em relação à origem O e com o sistema de eixos representado, a posição da partícula A é medida por:

A) $\begin{pmatrix} 4cm \\ 1cm \end{pmatrix}$; B) $\sqrt{(4)^2 + (1)^2}$ cm; C) $\begin{pmatrix} 1cm \\ 4cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} -4cm \\ -1cm \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} -1cm \\ -4cm \end{pmatrix}$;

165) Se a partícula A deslocar-se até a posição ocupada pela partícula C o seu deslocamento vetorial será medido por:

A) $\begin{pmatrix} 3cm \\ 2cm \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3cm \\ -2cm \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} -3cm \\ 2cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} -3cm \\ -2cm \end{pmatrix}$; E) $\sqrt{(3)^2 + (2)^2}$ cm.

166) Em função dos vetores de posição $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ das partículas A e B em relação à origem O, o vetor de posição da partícula B em relação à partícula A é:

A) $\vec{r}_B$; B) $\vec{r}_A + \vec{r}_B$; C) $\vec{r}_A - \vec{r}_B$;

D) $\vec{r}_B - \vec{r}_A$; E) $\sqrt{|\vec{r}_A|^2 + |\vec{r}_B|^2}$.

167) Considere o vetor de posição R_c da partícula C tomando-se como origem a partícula A. Qual ou quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

I) A medida do vetor R_c independe do sistema de eixos escolhidos.
II) O módulo do vetor R_c independe do sistema de eixos escolhidos.
III) A medida do vetor R_c depende da posição da partícula B.

A) sòmente I; B) sòmente II; C) sòmente III;
D) tôdas; E) nenhuma.

168) Se a partícula A deslocar-se até a posição ocupada pela partícula B e a seguir até a posição ocupada pela partícula C, o seu deslocamento ve

do ponteiro é representada por:

E) nenhuma das respostas anteriores.

163) No intervalo de tempo Δt, a velocidade escalar média de uma partícula é $<v>$, e sua velocidade vetorial média, $<\vec{v}>$.

Podemos afirmar que:

A) $|<v>| = |<\vec{v}>|$;
B) $|<v>| < |<\vec{v}>|$;
C) $|<v>| \geq |<\vec{v}>|$;
D) $|<v>| > |<\vec{v}>|$;
E) $|<v>| \leq |<\vec{v}>|$;

As perguntas 164 a 169 referem-se a três partículas A B C cujas posições estão representadas abaixo.

164) Em relação à origem O e com o sistema de eixos representado, a posição da partícula A é medida por:

A) $\begin{pmatrix} 4cm \\ 1cm \end{pmatrix}$; B) $\sqrt{(4)^2 + (1)^2}$ cm; C) $\begin{pmatrix} 1cm \\ 4cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} -4cm \\ -1cm \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} -1cm \\ -4cm \end{pmatrix}$;

165) Se a partícula A deslocar-se até a posição ocupada pela partícula C o seu deslocamento vetorial será medido por:

A) $\begin{pmatrix} 3cm \\ 2cm \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 3cm \\ -2cm \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} -3cm \\ 2cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} -3cm \\ -2cm \end{pmatrix}$; E) $\sqrt{(3)^2 + (2)^2}$ cm.

166) Em função dos vetores de posição $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ das partículas A e B em rela- à origem O, o vetor de posição da partícula B em relação à partícula A é:

A) $\vec{r}_B$; B) $\vec{r}_A + \vec{r}_B$; C) $\vec{r}_A - \vec{r}_B$;

D) $\vec{r}_B - \vec{r}_A$; E) $\sqrt{|\vec{r}_A|^2 + |\vec{r}_B|^2}$.

167) Considere o vetor de posição R_c da partícula C tomando-se como origem a partícula A. Qual ou quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

I) A medida do vetor R_c independe do sistema de eixos escolhidos.
II) O módulo do vetor R_c independe do sistema de eixos escolhidos.
III) A medida do vetor R_c depende da posição da partícula B.

A) sòmente I; B) sòmente II; C) sòmente III;
D) tôdas; E) nenhuma.

168) Se a partícula A deslocar-se até a posição ocupada pela partícula B e a seguir até a posição ocupada pela partícula C, o seu deslocamento ve

torial total será medido por:

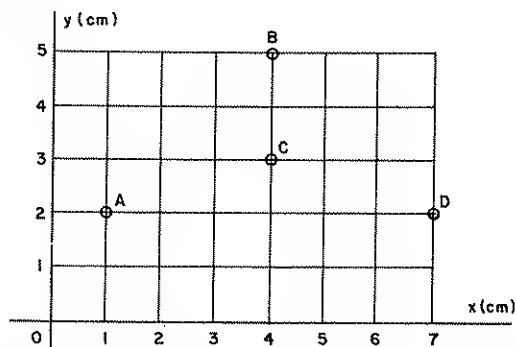
A) $\begin{pmatrix} 1cm \\ -3cm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2cm \\ 1cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3cm \\ -2cm \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} -1cm \\ 3cm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2cm \\ 1cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3cm \\ 4cm \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} 1cm \\ 3cm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2cm \\ 1cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3cm \\ 4cm \end{pmatrix}$; E) $\sqrt{(1)^2 + (3)^2} + \sqrt{(2)^2 + (1)^2}$ cm.

C) $\begin{pmatrix} -3cm \\ 1cm \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1cm \\ 2cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2cm \\ 3cm \end{pmatrix}$;

169) Se a partícula B deslocar-se até o ponto meio do segmento determinado pelas posições das partículas A e C, a componente-y do seu deslocamento vetorial será:

A) 1cm; B) 3cm; C) -1cm; D) -2cm; E) 2cm.

Perguntas 170 e 171.

Sejam $\vec{r}_A$ $\vec{r}_B$ $\vec{r}_C$ $\vec{r}_D$ os vetores de posição das quatro partículas assinaladas, tomando como origem o ponto O.

170) Se as partículas tiverem a mesma massa, a soma $\frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D)$ tem um sentido físico. O valor dessa soma é:

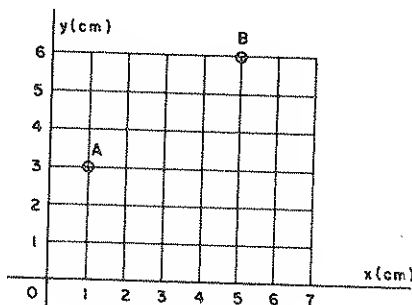
A) $\begin{pmatrix} 1cm \\ 2cm \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 4cm \\ 5cm \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 4cm \\ 3cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 7cm \\ 2cm \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 16cm \\ 12cm \end{pmatrix}$

171) Se as massas respectivas das partículas forem proporcionais respectiva - mente a 1, 2, 3, 4, a soma $\frac{1}{10}(\vec{r}_A + 2\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 4\vec{r}_D)$ tem um sentido fí sico, O valor dessa soma é:

A) $\begin{pmatrix} 0,1cm \\ 0,2cm \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 0,8cm \\ 1,0cm \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1,2cm \\ 0,9cm \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} 2,8cm \\ 0,8cm \end{pmatrix}$; E) $\begin{pmatrix} 4,9cm \\ 2,9cm \end{pmatrix}$.

Perguntas 172 a 174.

No decorrer de um movimento plano, uma partícula vai da posição A a té a posição B em 2,0s.

172) Nêsse intervalo, a posição da partícula variou de r, medido por:

A) $\begin{pmatrix} 4{,}0\text{cm} \\ 3{,}0\text{cm} \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1{,}0\text{cm} \\ 3{,}0\text{cm} \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 5{,}0\text{cm} \\ 6{,}0\text{cm} \end{pmatrix}$;

D) 5,0cm; E) Não se pode dar a medida de $\Delta\vec{r}$ sem especificar a origem dos vetores de posição.

173) Nêsse intervalo a velocidade vetorial média da partícula foi $<\vec{v}>$, medida por:

A) $\begin{pmatrix} 2\text{cm/s} \\ 1{,}5\text{cm/s} \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 0{,}50\text{cm/s} \\ 1{,}5\text{cm/s} \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 2{,}5\text{cm/s} \\ 3{,}0\text{cm/s} \end{pmatrix}$;

D) 2,5cm/s;

E) Não se pode dar a medida de $<\vec{v}>$ sem especificar a origem dos vetores de posição.

174) Nêsse intervalo a velocidade escalar média da partícula foi igual a:

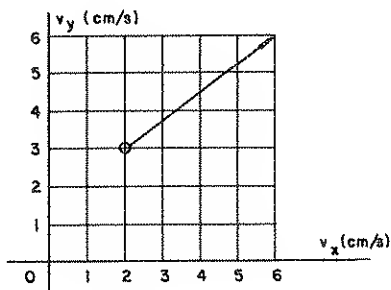
A) $\sqrt{(2)^2 + (1{,}5)^2}$ cm/s;

B) $\sqrt{(0{,}50)^2 + (1{,}5)^2}$ cm/s;

C) $\sqrt{(2{,}5)^2 + (3{,}0)^2}$ cm/s;

D) 2,5 cm/s;

E) Não se pode determinar a velocidade escalar média sem conhecer a trajetória da partícula.

Perguntas 175 e 176.

Em determinado instante a velocidade de uma partícula é representada pelo segmento orientado da figura na página anterior.

175) O módulo da velocidade vetorial da partícula é:

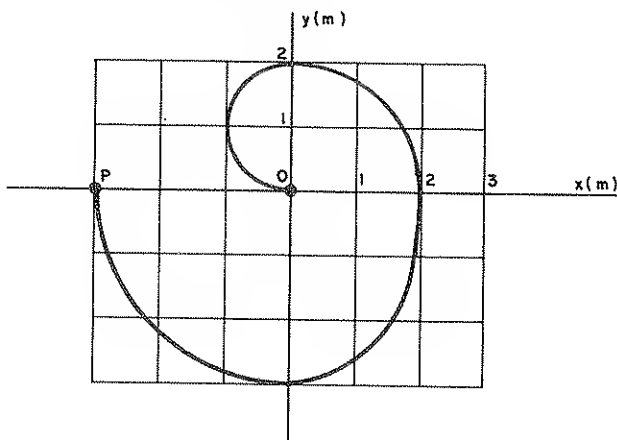
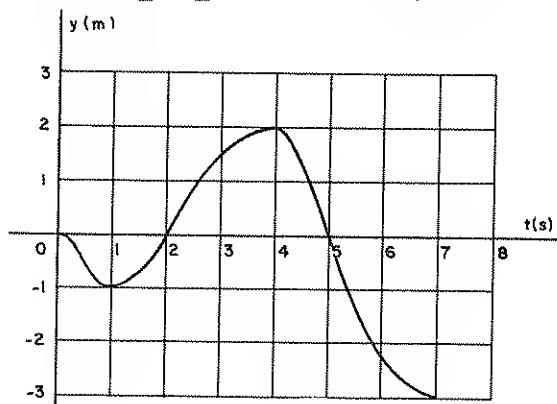
A) igual a 5,0cm/s; B) igual a 3,0cm/s; C) igual a 4,0cm/s;
D) proporcional à área sombreada; E) proporcional ao coeficiente angular de suporte do segmento orientado.

176) O valor absoluto da velocidade escalar da partícula é:

A) igual a 5,0cm/s; B) igual a 3,0cm/s; C) igual a 4,0cm/s;
D) proporcional à área sombreada; E) proporcional ao coeficiente angular do suporte do segmento orientado.

Perguntas 177 a 183.

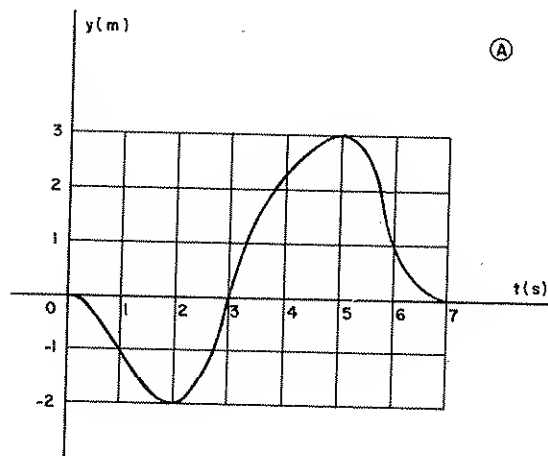
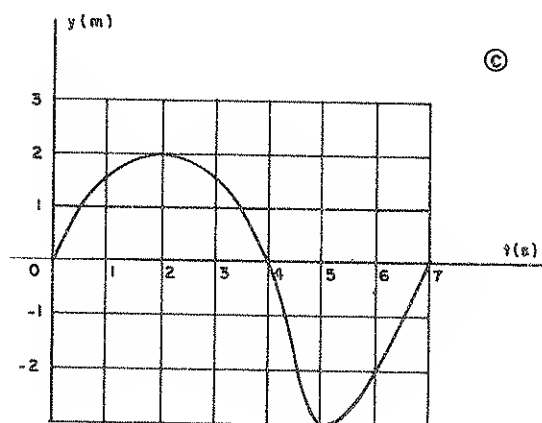
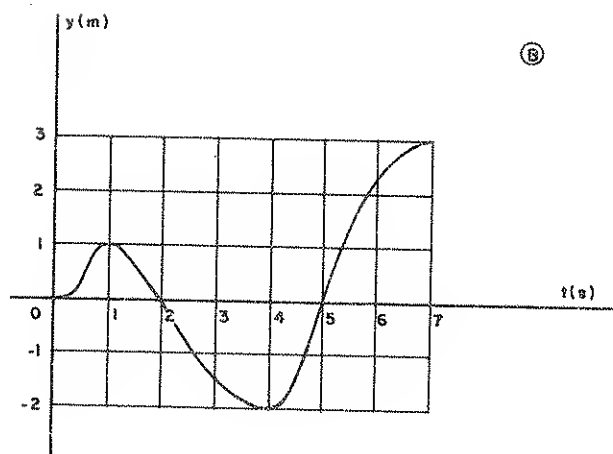
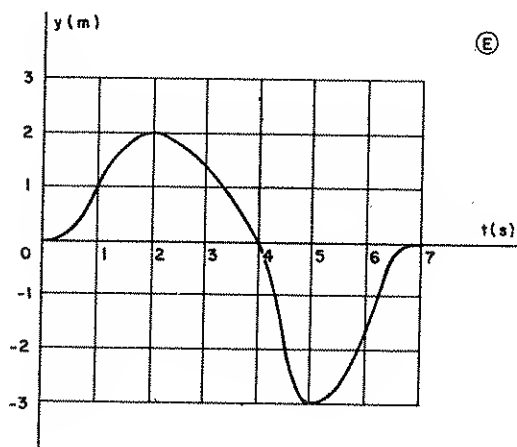
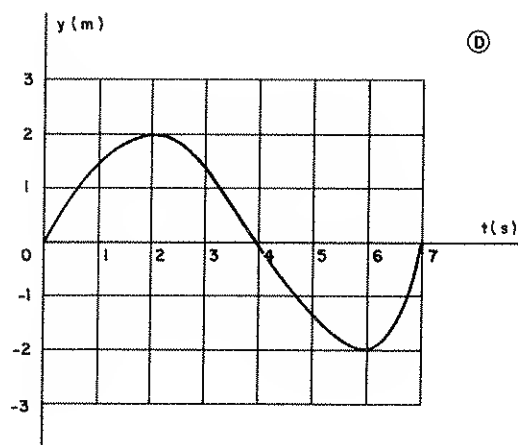
Uma partícula descreve a trajetória plana mostrada na figura abaixo, partindo de O com velocidade inicial nula e chegando finalmente em P.

A origem das posições é O. Tôdas as grandezas cinemáticas são medidas com os eixos (Ox Oy) da figura.

O gráfico x vs t do movimento é representado a seguir:

177) O gráfico y vs t é um dos cinco propostos a seguir.

y (m)
Ⓑ
3
2
1
0
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
t (s)

y (m)
Ⓒ
3
2
1
0
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
t (s)

y (m)
Ⓓ
3
2
1
0
-1
-2
-3
t(s)
1
2
3
4
5
6
7

y (m)
Ⓔ
3
2
1
0
-1
-2
-3
t(s)
1
2
3
4
5
6
7

178) Em t = 2,0s, a distância da partícula à origem era:

A) zero; B) 1,0cm; C) 2,0m; D) 3,0m; E) 5,0m.

179) Em t = 2,0s, a velocidade escalar da partícula era aproximadamente igual a:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) 3,0m/s; E) 5,0m/s.

180) Em t = 4,0s as componentes do vetor de posição da partícula eram:

A) $\begin{pmatrix} 2,0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (m); B) $\begin{pmatrix} 2,0 \\ 2,2 \end{pmatrix}$ (m); C) $\begin{pmatrix} 2,0 \\ -2,0 \end{pmatrix}$ (m);

D) $\begin{pmatrix} 2,0 \\ -3,0 \end{pmatrix}$ (m); E) $\begin{pmatrix} 2,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$ (m).

181) Em t = 7,0s (ao chegar ao ponto P) a velocidade escalar da partícula era:

A) zero; B) 1,0m/s; C) 2,0m/s; D) 3,0m/s; E) 5,0m/s.

182) As componentes da velocidade vetorial em t = 5,0s eram:

A) $\begin{pmatrix} 3,0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (m/s); B) $\begin{pmatrix} -3,0 \\ -2,0 \end{pmatrix}$ (m/s); C) $\begin{pmatrix} 3,0 \\ 3,0 \end{pmatrix}$ (m/s);

D) $\begin{pmatrix} -3,0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (m/s); E) $\begin{pmatrix} 3,0 \\ 4,0 \end{pmatrix}$ (m/s).

183) No instante inicial, você representa a aceleração da partícula por um segmento cuja origem está em O.

Êsse segmento está:

A) no 1º quadrante; B) no 2º quadrante;
C) no 3º quadrante; D) no 4º quadrante;
E) em nenhuma das posições propostas acima.

184) Em determinado instante $\underline{t}$, a posição vetorial de uma partícula em movimento plano é medida pelo vetor $\begin{pmatrix} 3,0cm \\ 4,0cm \end{pmatrix}$.

A velocidade da partícula é constante, sendo igual a $\begin{pmatrix} 0 \\ 5,0cm/s \end{pmatrix}$. Os eixos utilizados para medir a posição são paralelos e de mesmo sentido que os eixos utilizados para medir a velocidade.

No instante $\underline{t + \Delta t}$ a posição vetorial da partícula poderá ser medida pelo vetor:

A) $\begin{pmatrix} 3,0cm \\ 2,0cm \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 2,0cm \\ 4,0cm \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 4,0cm \\ 10\ cm \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 3,0cm \\ 6,0cm \end{pmatrix}$;

E) A ou D.

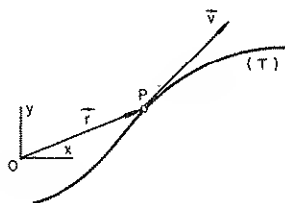
185) Uma partícula cuja velocidade no instante $\underline{t}$ é $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4,0cm/s \\ 3,0cm/s \end{pmatrix}$, se movimenta com aceleração uniforme, representada por um vetor cuja direção é a do eixo v_y.

Qual dos seguintes vetores pode representar a velocidade da partícula em um instante posterior (t + Δt)?

A) $\begin{pmatrix} 4,0cm/s \\ 3,0cm/s \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 4,0cm/s \\ 5,0cm/s \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 2,0cm/s \\ -4,0cm/s \end{pmatrix}$;

D) $\begin{pmatrix} -4,0cm/s \\ 0 \end{pmatrix}$; E) qualquer um dos vetores B, C ou D.

Perguntas 186 e 187.

Uma partícula descreve a trajetória (T). Em determinado instante a partícula está em P, a sua posição vetorial é $\vec{r}$ e a sua velocidade vetorial é $\vec{v}$.

186) O módulo de $\vec{v}$ é:

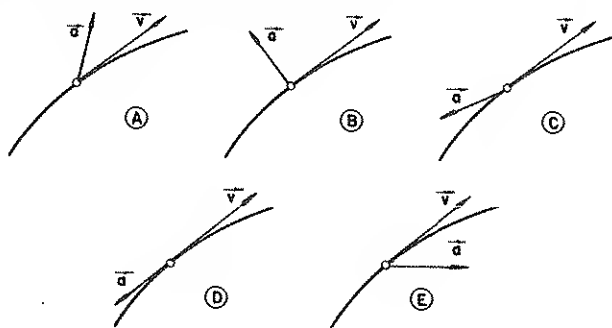
A) igual a $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ para Δt pequeno;

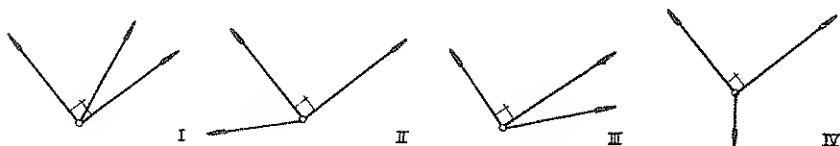
B) igual ao valor absoluto da velocidade escalar;

C) proporcional ao coeficiente angular da direção de $\vec{v}$;

D) igual ao módulo de $\vec{r}$;

E) igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$.

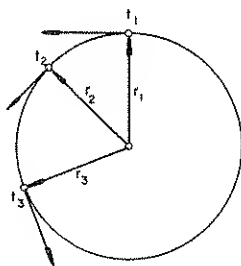
187) Qual dos seguintes segmentos orientados pode representar a aceleração da partícula na posição assinalada na figura?

Perguntas 188 e 189.

São propostos os seguintes conjuntos de segmentos orientados, associados respectivamente à posição $\vec{r}$, à velocidade $\vec{v}$ e à aceleração $\vec{a}$ de uma partícula em movimento circular. A origem das posições está no centro da trajetória.

188) Qual ou quais dos conjuntos podem caracterizar um movimento circular acelerado?

A) I II III sòmente;
B) II III sòmente;
C) II sòmente;
D) IV sòmente;
E) I II III IV.

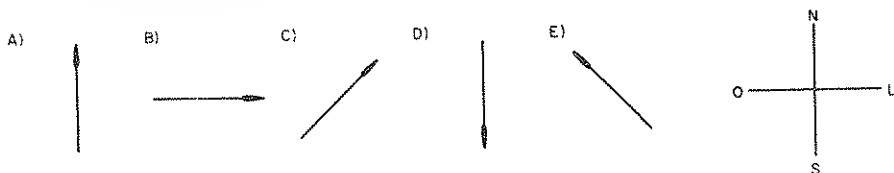
189) Qual ou quais dos conjuntos podem caracterizar um movimento circular retardado?

A) II III IV sòmente;
B) II III sòmente;
C) IV sòmente;
D) II sòmente;
E) I II III IV.

190) Uma partícula descreve uma circunferência sempre no mesmo sentido (positivo). A figura representa três posições em três instantes suvessivos t_1 t_2 t_3, com as velocidades correspondentes. A velocidade da partícula não se anula no intervalo (t_1 t_3). Podemos afirmar que:

A) no intervalo (t_1 t_3) há pelo menos um instante em que a aceleração da partícula é nula;
B) no intervalo (t_1 t_3) há pelo menos um instante em que a aceleração e a velocidade são perpendiculares;
C) no intervalo (t_1 t_3) há pelo menos um instante em que a aceleração e a velocidade são paralelas;
D) no intervalo (t_1 t_3) há pelo menos um instante em que a aceleração vetorial é mínima;
E) nenhuma das afirmações precedentes é necessàriamente verdadeira.

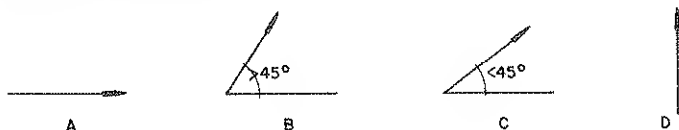
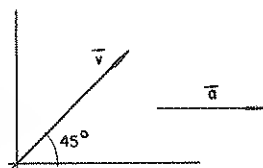
Perguntas 191 e 192.

191) Em determinado instante, um automóvel anda em direção do Norte com velocidade de 60km/h. Dez segundos depois êle anda em direção Nordeste, com velocidade de 85km/h.

Durante êsse intervalo de 10 segundos a aceleração média do carro é representada pelo segmento orientado:

192) O módulo da aceleração vetorial média do carro, durante o mesmo intervalo, é igual a:

A) 6,0km/h/s; B) 2,5km/h/s; C) -6,0km/h/s; D) -2,5km/h/s;
E) zero.

193) No instante t = 0 a velocidade vetorial de uma partícula é $\vec{v}$ (veja figura.)

A aceleração do movimento é constante, sendo representada pelo vetor $\vec{a}$. Em t=2,0s qual dos seguintes vetores poderá representar a velocidade da partícula?

E) qualquer um dos precedentes.

194) Em determinado instante uma partícula vai em direção Nordeste com veloci-

dade de 10m/s. A aceleração é constante, tem direção Norte-Sul, e vale 1,0m/ /s^2. Quanto tempo vai passar até que a partícula se movimente em direção Sudeste?

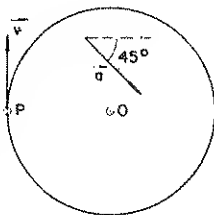
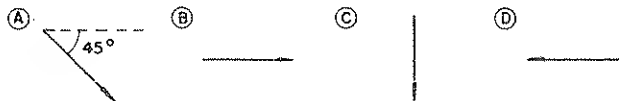
A) 1,0s;
B) 7,0s;
C) 10s;
D) 14s;
E) nenhum dos valores propostos.

195) (Refira-se à pergunta precedente).

Qual é o módulo da velocidade da partícula quando ela se movimenta na direção Sudeste?

A) 1,0m/s;
B) 7,0m/s;
C) 10m/s;
D) 14m/s;
E) nenhum dos valores propostos.

CAPÍTULO VII

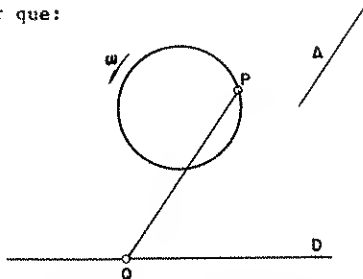
196) O movimento de uma partícula é circular uniforme. No instante t a partícula está em P e sua velocidade é $\vec{v}$. No intervalo de tempo Δt que se inicia em t, a aceleração vetorial média da partícula é representada pelo segmento orientado $<\vec{a}>$.

No instante $t + \Delta t$, a velocidade da partícula será representada por:

E) um vetor que não pode ser determinado com os dados fornecidos.

197) Você lança uma pedra verticalmente para cima com velocidade de 10 m/s. Durante o intervalo de tempo entre o lançamento e o instante em que a pedra volta ao ponto de partida, o módulo da velocidade média da pedra foi:

A) igual a 10m/s;
B) menor que 10m/s;
C) maior que 10m/s;
D) igual a zero;
E) igual a 9,8m/s.

198) Uma partícula P tem um movimento circular uniforme com velocidade angular ω. O raio da trajetória é R.

Projeta-se o ponto P em Q sôbre a reta D, paralelamente à direção Δ. Δ não é perpendicular à D.

Podemos afirmar que:

A) o movimento do ponto Q não é harmônico simples;

B) o movimento do ponto Q é harmônico simples; sua amplitude é igual a R;

C) o movimento do ponto Q é harmônico simples; sua amplitude é menor que R;

D) o movimento do ponto Q é harmônico simples; sua amplitude é menor que 2R e maior que $\frac{R}{2}$;

E) o movimento do ponto Q é harmônico simples; sua amplitude é maior que R.

199) A velocidade máxima de uma partícula em movimento harmônico simples é 12cm/s. A aceleração máxima da partícula é 36cm/s^2.

O período do movimento é:

A) 1s; B) 2s; C) 3s; D) 4s; E) 5s.

200) (Continuação da 199).

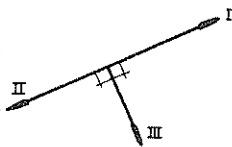
A amplitude do movimento é:

A) 2cm; D) 8cm;

B) 4cm; E) 10cm.

C) 6cm;

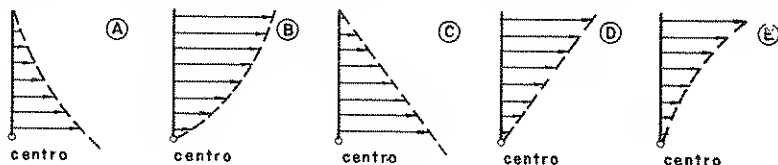
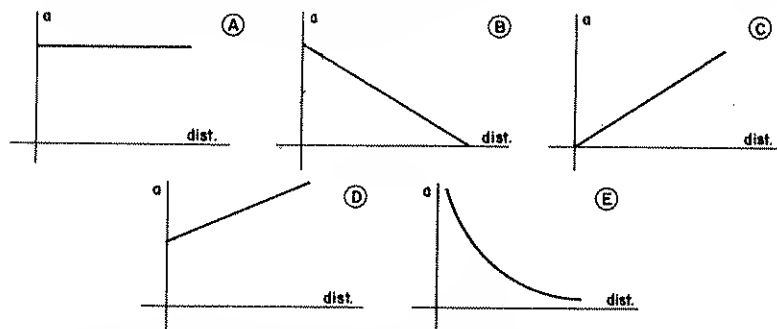
Perguntas 201 e 202.

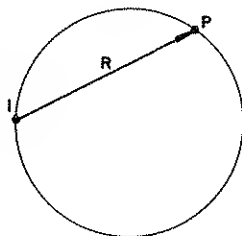
Uma partícula tem no plano um movimento circular uniforme. Os segmentos orientados representados ao lado são associados à posição, à velocidade e à aceleração vetoriais da partícula. (A origem das posições está no centro da trajetória).

201) Se a partícula gira no sentido positivo (trigonomtétrico), os segmentos que representam a posição, a velocidade e a aceleração são, nesta ordem:

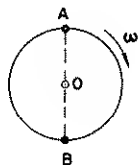
A) I, II, III;
B) II, III, I;
C) III, I, II;
D) I, III, II;
E) II, I, III.

202) Se a partícula gira no sentido negativo (trigonométrico), os segmentos que representam a posição, a velocidade e a aceleração são, nesta ordem:

A) I, II, III;
B) II, III, I;
C) III, I, II;
D) I, III, II;
E) II, I, III.

203) Qual das figuras propostas pode representar as velocidades vetoriais de diferentes pontos de um mesmo raio de um prato de toca discos em rotação uniforme, em determinado instante?

204) Qual dos seguintes gráficos pode representar o módulo da aceleração, em função da distância ao centro, de vários pontos da plataforma de um carrossel em movimento de rotação uniforme?

205) Uma partícula P está em movimento circular uniforme. Em vez de escolher o centro como origem das posições vetoriais você escolhe um ponto I da trajetória.

Sendo $\underline{\omega}$ a velocidade angular de P, o vetor de posição $\vec{R}$ gira em tôrno de I com velocidade angular igual a:

A) ω; B) 2ω; C) $\frac{\omega}{2}$; D) ω^2; E) $\frac{1}{\omega}$.

206) O movimento de uma partícula é circular uniforme, no sentido da seta e com velocidade angular $\underline{\omega}$. No intervalo de tempo que separa as passagens por A e B a aceleração média da partícula é o vetor:

E) zero.

207) Referindo-se a pergunta anterior, o módulo da aceleração média é:

A) igual a ω^2R;
B) menor que ω^2R;
C) maior que ω^2R;
D) igual a zero;
E) igual ao quociente de ω^2R pela metade do período.

208) Os números marcados no mostrador de um relógio vão de 1 até 12. Entre 12:00 e 3:00 a posição vetorial da extremidade do ponteiro das horas varia de um vetor representado pelo segmento orientado seguinte (em cada par o primeiro número representa a origem, e o segundo a extremidade).

A) (12 9); B) (9 12); C) (3 12); D) (12 3); E) (9 3).

209) (Refira-se à pergunta precedente).

No mesmo intervalo de tempo a variação da velocidade vetorial da extremidade do ponteiro das horas pode ser representada pelo segmento orientado:

A) (12 9); B) (9 12); C) (3 12); D) (12 3); E) (9 3).

210) Referindo-se a pergunta nº 208, a variação da aceleração vetorial da extremidade do ponteiro das horas, no mesmo intervalo de tempo, pode ser representado pelo segmento orientado:

A) (12 9); B) (9 12); C) (3 12); D) (12 3); E) (9 3).

211) Continua referindo-se à pergunta nº 208. Durante o mesmo intervalo de tempo, a aceleração vetorial média da partícula é representada pelo segmento orientado;

A) (12 9); B) (9 12); C) (3 12); D) (12 3); E) (9 3).

212) Um carro Fórmula I percorre uma pista de corrida circular. Em determinado

instante a velocidade do carro é 120km/h. Vinte segundos depois sua velocidade passou para 240km/h. Durante êsse intervalo o módulo da aceleração normal do carro:

A) permanece nula;
B) permanece igual ao seu valor inicial;
C) reduziu-se à metade de seu valor inicial;
D) duplicou-se em relação ao valor inicial;
E) quadruplicou-se em relação ao valor inicial.

213) Um carro de corrida entra numa curva horizontal a 144km/h. (40m/s). O módulo máximo da aceleração que a pista pode exercer sôbre o carro é 15 m/ $/s^2$. Sendo igual a 100m o raio de curvatura da curva, você conclui que o carro:

A) poderá fazer a curva com qualquer velocidade;
B) só poderá fazer a curva se reduzir a velocidade a 15m/s;
C) deverá freiar para poder fazer a curva;
D) poderá acelerar ao fazer a curva;
E) deverá fazer a curva com a mesma velocidade de 40m/s.

214) Referindo-se ao movimento plano de uma partícula, qual ou quais das seguintes afirmações são necessàriamente certas?

I) se a posição e a velocidade vetoriais são sempre ortogonais, o movimento é circular.
II) se a velocidade e a aceleração vetoriais são sempre paralelas o movimento é retilíneo.
III) se a velocidade e a aceleração vetoriais são sempre ortogonais o movimento é circular uniforme.
IV) se a posição e a aceleração vetoriais são sempre paralelas e de sentidos opostos o movimento é circular.

A) sòmente I; B) sòmente I e II;

C) sômente I, II e III; D) sômente I e IV;

E) tôdas.

215) Em determinado instante a posição escalar de uma partícula em movimento harmônico simples é 3,0cm. (origem no centro) e sua aceleração escalar é $-30cm/s^2$. O período de movimento é aproximadamente igual a:

A) 1s; B) 2s; C) 3s; D) 4s; E) 5s.

216) Em determinado instante a posição de uma partícula em movimento harmônico simples é -1,0cm. (origem no centro) e sua aceleração escalar é-40cm/ $/s^2$. Podemos afirmar que:

A) a velocidade escalar da partícula, naquêle mesmo instante, é 40cm/s;

B) o período do movimento é aproximadamente igual a 1s;

C) o módulo da aceleração, naquêle mesmo instante, é 40 vêzes maior que o da posição;

D) a velocidade da partícula está diminuindo em módulo;

E) há incoerências no enunciado da questão.

217) Uma partícula em movimento harmônico simples (origem das posições no centro) passa pela posição x = -2,0cm. A velocidade v = 4,0cm/s. Podemos afirmar que nêsse instante:

A) o movimento da partícula é retardado;

B) o movimento da partícula é acelerado;

C) o movimento da partícula pode ser acelerado ou retardado;

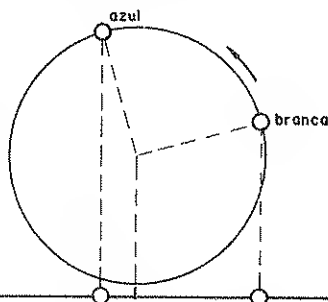
D) a aceleração da partícula é máxima;

E) a aceleração da partícula é mínima.

218) A frequência angular de uma partícula em movimento harmônico simples é 2,0 rad/s. A amplitude do movimento é 2,0cm. Se um colega seu lhe disse que em determinado instante a aceleração da partícula é $-10cm/s^2$ você con-

cluiria que:

A) a partícula, naquêle instante, tinha velocidade negativa;
B) a partícula, naquêle instante, tinha abscissa positiva;
C) a partícula, naquêle instante, tinha velocidade positiva;
D) a partícula, naquêle instante, tinha abscissa negativa;
E) o seu colega lhe ofereceu um valor errado da aceleração.

219) Na borda do prato de um toca disco você gruda uma bola branca e uma azul com um afastamento angular de 90°, nas posições mostradas na figura. O prato gira no sentido da seta e você observa em visão razante (i,e., seu ôlho está a uns 2 ou 3 metros, no plano do prato). Qual ou quais das seguintes afirmações estão corretas?

Para você e em qualquer instante:

I) a posição da bola azul é proporcional a velocidade da bola branca.
II) a posição da bola branca é proporcional a aceleração da bola azul.
III) a aceleração da bola branca é proporcional a aceleração da bola azul.
IV) a velocidade da bola azul é proporcional a posição da bola branca.
V) a aceleração da bola azul é proporcional a velocidade da bola branca.

A) I, IV e V sòmente;
B) II, III e IV sòmente;
C) I e II sòmente;
D) III e V sòmente;
E) I, II, III, IV e V.

220) Uma partícula está em movimento harmônico simples. Representando por $|x_o|$ a amplitude por $|v_o|$ o módulo da velocidade máxima e por $|a_o|$ o módulo da aceleração máxima, qual dos conjuntos propostos a seguir pode se referir ao movimento da partícula?

	$\|x_o\|$ (cm)	$\|v_o\|$ (cm/s)	$\|a_o\|$ (cm/s^2)
A)	3	4	5
B)	3	6	9
C)	3	9	18
D)	3.	9	27

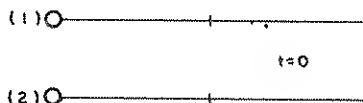
E) qualquer um dos precedentes.

221) Sabendo-se que:

1º) a lua apresenta sempre o mesmo hemisfério para a terra.

2º) a razão (distância terra-lua/raio da lua) é aproximadamente igual a 150, você conclui que a razão entre a velocidade do centro da lua no seu movimento em tôrno da terra e a velocidade de um ponto do equador lunar no seu movimento em tôrno do eixo da lus é igual a:

A) 150; B) $(150)^2$; C) 75; D) $(75)^2$; E) 3000.

222) Duas partículas estão em movimento harmônico simples. As trajetórias são paralelas, as amplitudes iguais, mas a partícula (1) tem período de 3,0s e a partícula (2), de 4,0s. Em t = 0, largam-se as duas partículas das posições de elongação máxima indicadas na figura. Em que instante voltarão a encontrar-se nessa posição, pela primeira vez?

A) 1,0s; B) 7,0s; C) 9,0s; D) 12s; E) 16s.

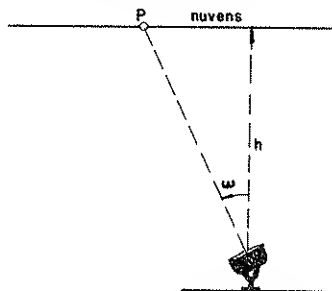
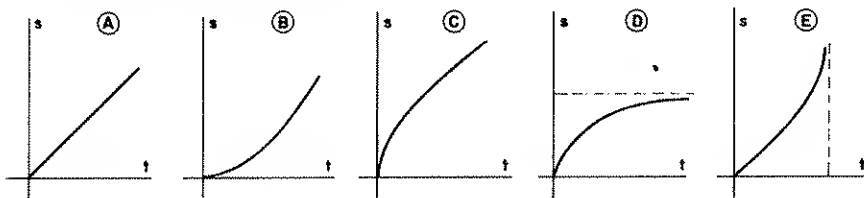
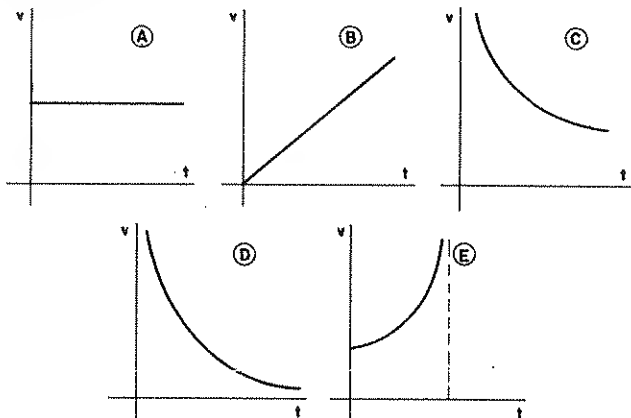
223) O ponteiro dos minutos de um relógio coincide com o ponteiro das horas em 0:00 hora.

Êles voltarão a coincidir pela primeira vez na hora expressa pela fração:

A) $\frac{13}{12}$; B) $\frac{12}{11}$; C) $\frac{11}{10}$; D) $\frac{10}{9}$; E) $\frac{9}{8}$.

As perguntas 224 e 225 referem-se à situação seguinte:

O feixe de um holofote de DCA gira com velocidade angular constante ω em um plano vertical (plano da fôlha).

O feixe incide em P sôbre uma camada horizontal de nuvens, a uma altitude h.

224) Tomando como origem o ponto da camada de nuvens na vertical do holofote, qual dos seguintes gráficos pode representar a posição s da zona luminosa em função do tempo t?

225) Qual dos seguintes gráficos representa a velocidade v da zona iluminada em função do tempo t?

Perguntas 226 e 227.

Duas partículas oscilam em movimento harmônico simples. A primeira tem amplitude de 5,0cm e frequência angular de 8,0/s. A segunda tem amplitude de 10cm e frequência de 4,0/s.

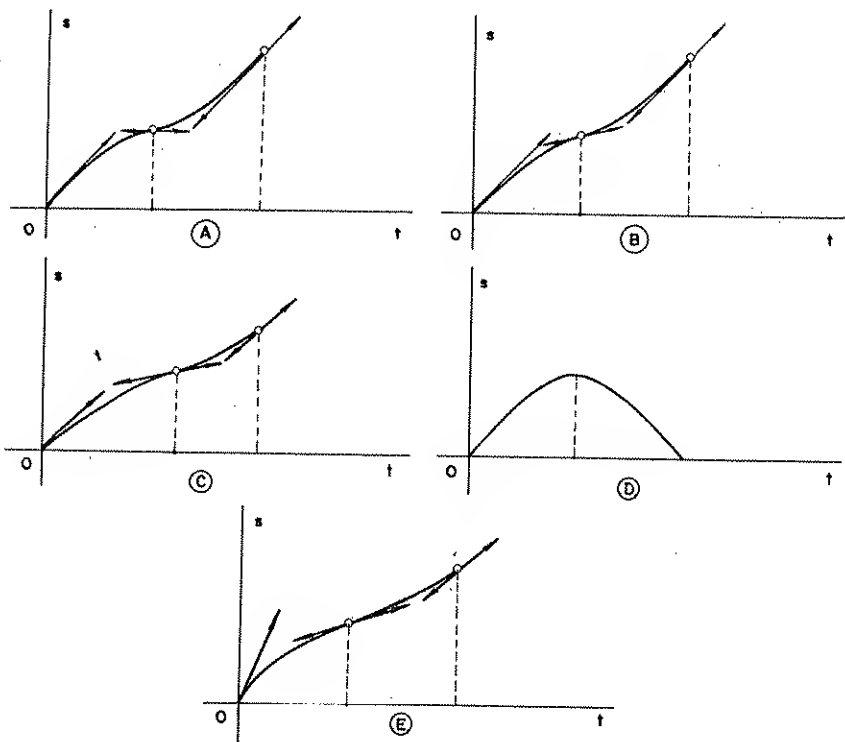
226) A razão $\frac{v_1}{v_2}$ entre os valores absolutos das velocidades máxima das partículas é:

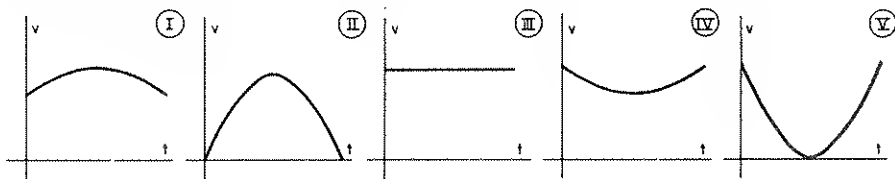
A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) 2; E) 4.

227) A razão $\frac{a_1}{a_2}$ entre os valores absolutos das acelerações máxima das partículas é:

A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) 2; E) 4.

CAPÍTULO VIII

228) Desprezando-se a resistência do ar, o gráfico s vs t de um projétil lançado para atingir um alvo no plano horizontal de lançamento é:

229) Você atira uma pedra em trajetória parabólica. (O Martins está lhe mostrando como).

qual dos cinco gráficos seguintes melhor representa a velocidade escalar $\underline{v}$ em função do tempo $\underline{t}$?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

230) Um avião faz a ida e volta Rio-São Paulo-Rio com velocidade constante $\underline{V}$ <u>em relação ao ar</u> e sem parar em São Paulo. Há um vento que sopra de São Paulo para o Rio com velocidade $v < V$. Sendo $\underline{d}$ a distância entre as duas cidades a duração do percurso total é:

A) $\frac{2d}{V}$; B) $\frac{2d}{V}\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}$; C) $\frac{2d}{V} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$;

D) $\frac{2d}{V} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$; E) $\frac{2d}{V} \frac{V}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$.

231) Um elevador está subindo com velocidade constante $\vec{v}$. Você está em pé no elevador e abre a mão que segura um lápis. No instante em que você abre a mão a velocidade do lápis <u>em relação ao elevador</u> é:

A) zero; B) ↑ $\vec{v}$; C) ↑ $2\vec{v}$; D) ↓ $-\vec{v}$; E) ↓ $-2\vec{v}$.

232) (Continuação da 231).

No instante em que você abre a mão a velocidade do lápis em relação à Terra é:

A) zero; B) ↑ $\vec{v}$; C) ↑ $2\vec{v}$; D) ↓ $-\vec{v}$; E) ↓ $-2\vec{v}$.

233) (Continuação da 232).

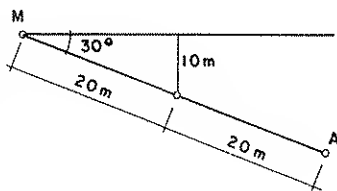
A aceleração da gravidade é $\vec{g}$, dirigida para baixo. No instante em que você abre a mão a aceleração do lápis em relação ao elevador é:

A) zero; B) ↓ $\vec{g}$; C) ↓ $2\vec{g}$; D) ↑ $-\vec{g}$; E) ↑ $-2\vec{g}$.

234) (Continuação da 233).

A aceleração da gravidade é $\vec{g}$, dirigida para baixo. No instante em que você abre a mão a aceleração do lápis em relação à Terra é:

A) zero; B) ↓ $\vec{g}$; C) ↓ $2\vec{g}$; D) ↑ $-\vec{g}$; E) ↑ $-2\vec{g}$.

235) O Martins em M quer acertar um alvo em A com a sua atiradeira. O terreno é inclinado a 30° abaixo da horizontal, como mostra a figura, onde você encontrará as distâncias relevantes. No meio da distância há uma barreira de 10m de altura. Qual o menor ângulo de tiro, medido a partir da direção MA, que permitirá acertar o alvo?

A) 15°; B) 30°; C) 45°; D) 60°; E) 90°.

236) (Continuação da 235).

Atirando debaixo do ângulo mínimo que permita atingir o alvo, o tem

po de vôo da pedra será:

A) 1,0s; B) 1,5s; C) 2,0s; D) 2,8s; E) 3,2s.

237) (Continuação da 236).

Atirando debaixo do ângulo mínimo que permita atingir o alvo, a velocidade inicial da pedra deverá ter um módulo igual a:

A) 7,0m/s; B) 10m/s; C) 14m/s; D) 20m/s; E) 24m/s.

238) (Continuação da 237).

Atirando debaixo do ângulo mínimo que permita atingir o alvo, a velocidade final da pedra (ao atingir o alvo) fará com a direção MA um ângulo de:

A) 15^o; B) 30^o; C) 45^o; D) 60^o; E) 90^o.

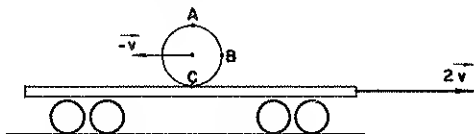
239) (Continuação da 238).

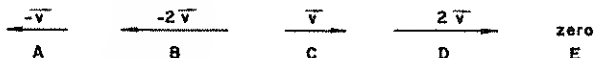
Atirando debaixo do ângulo mínimo que permita atingir o alvo, o módulo da velocidade final da pedra (ao atingir o alvo), será igual a:

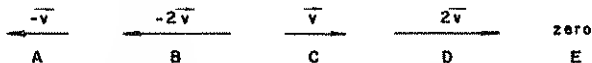
A) 7,0m/s; B) 10m/s; C) 14m/s; D) 20m/s; E) 24m/s.

Perguntas 240 a 245.

As perguntas 240 a 245 referem-se à situação seguinte: uma plataforma tem velocidade constante $2\vec{v}$ no referencial terrestre. Uma roda de bicicle-

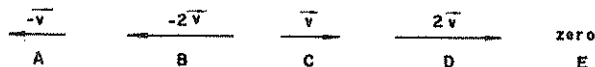
ta rola sem deslizár sôbre a plataforma com velocidade constante $-\vec{v}$ paralela à velocidade da plataforma e de sentido contrário.

240) Qual dos seguintes vetores representa a velocidade do ponto A da roda em relação à plataforma?

$-\vec{v}$ A $-2\vec{v}$ B $\vec{v}$ C $2\vec{v}$ D   zero E

241) Qual dos seguintes vetores representa a velocidade do ponto A da roda em relação à Terra?

$-\vec{v}$ A $-2\vec{v}$ B $\vec{v}$ C $2\vec{v}$ D   zero E

242) Qual dos seguintes vetores representa a velocidade do ponto C da roda em relação à plataforma?

$-\vec{v}$ A $-2\vec{v}$ B $\vec{v}$ C $2\vec{v}$ D   zero E

243) Qual dos seguintes vetores representa a velocidade do ponto C da roda em relação à Terra?

$-\vec{v}$ A $-2\vec{v}$ B $\vec{v}$ C $2\vec{v}$ D   zero E

244) Qual é o módulo da velocidade do ponto B da roda em relação à platafor - ma?

A) v; B) 2v; C) 3v; D) $v\sqrt{2}$; E) $v\sqrt{5}$.

245) Qual é o módulo da velocidade do ponto B da roda em relação à Terra?

A) v; B) 2v; C) 3v; D) $v\sqrt{2}$; E) $v\sqrt{5}$.

Perguntas 246 a 248.

As perguntas 246 a 248 referem-se à situação seguinte: do alto de um edifício de 40m de altura, o Martins atira horizontalmente uma pedra com velocidade de 10m/s. ($g = 10m/s^2$).

246) Se a pedra não encontrar nenhuma janela no caminho, a que distância do pé do edifício ela cairá?

A) 10m; B) 14m; C) 20m; D) 28m; E) 30m.

247) O tempo de vôo da pedra será:

A) 1,0s; B) 1,4s; C) 2,0s; D) 2,8s; E) 3,0s.

248) Ao encontrar o solo, a velocidade da pedra será igual a:

A) 10m/s; B) 14m/s; C) 20m/s; D) 28m/s; E) 30m/s.

Perguntas 249 a 252.

As perguntas 249 a 252 referem-se à situação seguinte: dois projéteis (1) e (2) são atirados do mesmo ponto, debaixo de ângulos de 30^o e 60^o respectivamente, medidos a partir do plano horizontal de lançamento. A velocidade inicial é a mesma (em módulo).

249) A razão $\frac{d_1}{d_2}$ entre os alcances dos dois projéteis, sôbre o plano horizontal de lançamento, é igual a:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

250) A razão $\frac{f_1}{f_2}$ entre as flechas dos dois projéteis é igual a:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

251) A razão $\frac{t_1}{t_2}$ entre os tempos de vôo dos dois projéteis é igual a:

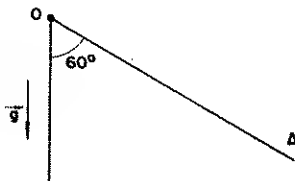
A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

252) A razão $\frac{v_1}{v_2}$ entre os módulos das velocidades dos dois projéteis ao atin girem o alvo é igual a:

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Perguntas 253 a 258.

Do ponto 0, atira-se um projétil com velocidade inicial de $1,0 \times 10^2$m/s, sôbre um plano 0Δ fazendo o ângulo de 60^o com a vertical do ponto 0.

$g = 10m/s^2$.

253) Qual deve ser o ângulo de tiro, medido a partir da direção 0Δ, para conseguir o alcance máximo sôbre o plano 0Δ?

A) 15^o; B) 30^o; C) 45^o; D) 60^o; E) 90^o.

254) Nas condições da pergunta precedente, qual é a altura vertical máxima atingida pelo projétil acima do plano 0Δ?

A) $1,0 \times 10^2$m; B) $5,0 \times 10^2$m; C) $1,0 \times 10^3$m; D) $1,5 \times 10^3$m;
E) $2,0 \times 10^3$m.

255) Ainda nas condições de alcance máximo, qual será a velocidade do projétil ao passar pelo ponto de altitude máxima acima do plano 0Δ?

A) 50m/s; B) 75m/s; C) $1,0 \times 10^2$m/s; D) $1,7 \times 10^2$m/s;
E) $2,0 \times 10^2$m/s.

256) Nas mesmas condições, qual é a velocidade do projétil ao incidir no alvo?

A) 50m/s;
B) 75m/s;
C) $1,0 \times 10^2$m/s;
D) $1,7 \times 10^2$m/s;
E) $2,0 \times 10^2$m/s.

257) Nas mesmas condições, qual é o módulo da velocidade vetorial média do projétil entre o instante do lançamento e o instante em que atinge o alvo?

A) 50m/s;
B) 75m/s;
C) $1,0 \times 10^2$m/s;
D) $1,7 \times 10^2$m/s;
E) $2,0 \times 10^2$m/s.

258) Sempre nas condições de alcance máximo, qual é o tempo de vôo do projétil?

A) 5,0s;
B) 10s;
C) 15s;
D) 20s;
E) 25s.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

CAPÍTULO II

1) C. 2) A. 3) A. 4) E. 5) C. 6) C. 7) B. 8) C. 9) C. 10) A.
11) B. 12) C. 13) C. 14) A. 15) E. 16) C. 17) D. 18) B.

CAPÍTULO III

19) B. 20) E. 21) A. 22) C. 23) A. 24) E.

CAPÍTULO IV

25) D. 26) E. 27) A. 28) E. 29) B. 30) A. 31) E. 32) D. 33) D.
34) A. 35) B. 36) C. 37) B. 38) D. 39) B. 40) D. 41) E. 42) A.
43) D. 44) B. 45) B. 46) A. 47) C. 48) B. 49) B. 50) C. 51) D.
52) B. 53) E. 54) E. 55) D. 56) E. 57) C. 58) D. 59) E. 60) E.
61) D. 62) A. 63) D. 64) C. 65) E. 66) A. 67) E. 68) D. 69) A.
70) E. 71) D. 72) B. 73) C. 74) A. 75) E. 76) B. 77) D. 78) B.
79) B. 80) A. 81) B. 82) A. 83) E. 84) A. 85) B. 86) A. 87) E.
88) A. 89) D. 90) C. 91) A. 92) E. 93) E. 94) A. 95) C. 96) B.
97) A. 98) E. 99) A. 100) A. 101) A. 102) A. 103) A. 104) A.
105) E. 106) C. 107) B. 108) A. 109) B. 110) B. 111) D. 112) A.
113) B. 114) A. 115) B. 116) A. 117) A. 118) D. 119) E. 120) E.
121) E. 122) C. 123) A. 124) C. 125) D. 126) A. 127) A. 128) A.
129) D.

CAPÍTULO V

130) B. 131) D. 132) A. 133) A. 134) C. 135) E. 136) C. 137) A.
138) C. 139) B. 140) C. 141) D. 142) B. 143) D. 144) A. 145) C.
146) B. 147) E. 148) B. 149) D. 150) C. 151) E. 152) E. 153) C.
154) C. 155) E. 156) C. 157) D. 158) B. 159) E.

CAPÍTULO VI

160) E. 161) C. 162) B. 163) C. 164) C. 165) B. 166) D. 167) B.
168) A. 169) B. 170) C. 171) E. 172) A. 173) A. 174) E. 175) C.
176) C. 177) E. 178) C. 179) C. 180) A. 181) A. 182) D. 183) D.
184) D. 185) B. 186) B. 187) E. 188) B. 189) C. 190) B. 191) B.
192) A. 193) C. 194) D. 195) C.

CAPÍTULO VII

196) B. 197) D. 198) E. 199) B. 200) B. 201) B. 202) D. 203) D.
204) C. 205) C. 206) D. 207) B. 208) D. 209) A. 210) C. 211) A.
212) E. 213) C. 214) B. 215) B. 216) E. 217) B. 218) E. 219) A.
220) D. 221) A. 222) D. 223) B. 224) E. 225) E 226) C. 227) D.

CAPÍTULO VIII

228) B. 229) D. 230) C. 231) A. 232) B. 233) B. 234) B. 235) D.
236) D. 237) C. 238) B. 239) E. 240) B. 241) E. 242) E. 243) D.
244) D. 245) D. 246) D. 247) D. 248) E. 249) C. 250) A. 251) E.
252) C. 253) D. 254) B. 255) C. 256) D. 257) C. 258) D.